2.5 特性関数

確率変数 X を考えます。X の特性関数とは

$$\varphi(\xi) = E[e^{ix\xi}]$$

のことです。確率変数 X が確率密度関数 $f(x)$ を持つ場合、X の**特性関数**は

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx$$

によって計算されます。[3]。ここで一般に、複素数値の関数

$$g(x) = g_1(x) + \sqrt{-1}g_2(x)$$

の積分は、その実部 $g_1(x)$ と虚部 $g_2(x)$ を用いて

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \sqrt{-1}\int_a^b g_2(x)dx$$

によって定義することに注意します。すると

$$e^{ix\xi} = \cos(x\xi) + \sqrt{-1}\sin(x\xi)$$

が成立しますから

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi)f(x)dx + \sqrt{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x\xi)f(x)dx$$

を得ます。

具体的な確率密度に対して特性関数を計算します。

例 2.1. *パラメータが* n *と* p *の 2 項変数について考えます。すなわち* $P(X = k) = {}_nC_k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ *を考えます*（$q = 1 - p$）。*このとき* X *の特性関数は*

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} e^{ik\xi} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(pe^{i\xi}\right)^k q^{n-k} = (pe^{i\xi} + q)^n\end{aligned}$$

[3] 一般に、絶対値が積分可能な関数 $f(x)$ すなわち

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$$

に対して

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} f(x)dx$$

は定義されて、関数 f の**逆フーリエ変換**と呼びます。

と計算されます。

例 2.2. 母数が $\lambda > 0$ の指数分布を考えます。その確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

によって定義します。この確率変数の特性関数を計算しましょう。

$$\hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} \cos(x\xi) e^{-\lambda x} + \sqrt{-1}\lambda \int_0^{+\infty} \sin(x\xi) e^{-\lambda x}$$

を計算すればいいので、実部と虚部の主要な部分をそれぞれ

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x\xi) e^{-\lambda x} dx, \ J = \int_0^{+\infty} \sin(x\xi) e^{-\lambda x} dx$$

と定めて、計算します。まず、I を部分積分することから始めます。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \cos(x\xi) \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)' dx \\ &= \left[\cos(x\xi)\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{\lambda}\xi \int_0^{+\infty} \sin(x\xi) e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\xi J \end{aligned}$$

から

$$\lambda I + \xi J = 1$$

を得ます。他方、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \sin(x\xi) \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)' dx \\ &= \left[\sin(x\xi)\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\xi \int_0^{+\infty} \cos(x\xi) e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\xi I \end{aligned}$$

から

$$\lambda J = \xi I$$

を得ます。この I と J の *1* 次式から

$$I = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \xi^2}, \quad J = \frac{\xi}{\lambda^2 + \xi^2}$$

が従います。これを用いると

$$\hat{f}(\xi) = \lambda(I + \sqrt{-1}J) = \lambda \frac{\lambda + i\xi}{\lambda^2 + \xi^2} = \frac{\lambda}{\lambda - \sqrt{-1}\xi}$$

と指数分布の特性関数が計算されます。

以上の計算では、複素数値の関数の積分を実部と居部に分けて行ないました。実は、原始関数（不定積分）を複素数値で考えれば、より簡単に計算できます。

以下は一般的な設定で準備を行ないます。複素数値の関数

$$g(t) = g_1(t) + \sqrt{-1}g_2(t)$$

の原始関数とは

$$G(t) = G_1(t) + \sqrt{-1}G_2(t)$$

で

$$G'(t) = g(t)$$

が成立するものです。このとき

$$G_1'(t) + \sqrt{-1}G_2'(t) = g_1(t) + \sqrt{-1}g_2(t)$$

から

$$G_i'(t) = g_i(t) \qquad (i = 1, 2)$$

が成立します。このとき

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)dt &= \int_a^b g_1(t)dt + \sqrt{-1}\int_a^b g_2(t)dt \\ &= [G_1(t)]_a^b + \sqrt{-1}\,[G_2(t)]_a^b \\ &= [G(t)]_a^b\end{aligned}$$

から

$$\int_a^b g(t)dt = [G(t)]_a^b$$

が従います。

他方 $f(t)$ と $g(t)$ が複素数値の関数とするとき、微分の公式

$$(f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm g'(t)$$

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

$$\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2}$$

が実数値関数と同様に成立します。

以下 $a,\ b \in \mathbb{R}$ とします。

$$e^{ibt} = \cos bt + \sqrt{-1}\sin bt$$

を微分すると

$$\left(e^{ibt}\right)' = -b\sin bt + \sqrt{-1}b\cos bt = \sqrt{-1}b(\cos bt + \sqrt{-1}\sin bt) = \sqrt{-1}be^{ibt}$$

と計算されます。ここで $\alpha = a + \sqrt{-1}b$ とすると

$$\begin{aligned}\left(e^{\alpha t}\right)' &= \left(e^{at}\cdot e^{ibt}\right)' \\ &= \left(e^{at}\right)'\cdot e^{ibt} + e^{at}\cdot\left(e^{ibt}\right)' \\ &= ae^{at}\cdot e^{ibt} + e^{at}\cdot\sqrt{-1}be^{ibt} \\ &= (a+\sqrt{-1}b)e^{at}\cdot e^{ibt} = \alpha e^{\alpha t}\end{aligned}$$

から公式

$$\left(e^{\alpha t}\right)' = \alpha e^{\alpha t}$$

を得ます。

ここで、再びパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従う確率変数 X の特性関数を考えます。すなわち

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_0^{+\infty} e^{ix\xi}\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \lambda\int_0^{+\infty} e^{(-\lambda+\xi)x}dx \\ &= \lambda\left[-\frac{1}{\lambda - i\xi}e^{(-\lambda+i\xi)x}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-\sqrt{-1}\xi}\end{aligned}$$

と計算されます。ここで

$$\left|e^{(-\lambda+i\xi)x}\right| = e^{-\lambda x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty))$$

から

$$e^{(-\lambda+i\xi)x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty))$$

が従うことに注意します。

特性関数の性質について考えていきます。以下では、主に確率密度を持つ確率変数について考察します。

独立な確率変数 X と Y があって、それぞれ確率密度関数 $f(x)$ と $g(y)$ を持つとします。このとき確率変数 $Z = X + Y$ の確率密度関数は

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy$$

と計算されます。このことを用いて、確率変数 Z の特性関数は

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy\right)dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi}f(z-y)dz\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z-y)\xi}e^{iy\xi}f(z-y)dz\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{iy\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z-y)\xi}f(z-y)dz\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{iy\xi}dy\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}f(t)dz = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

によって

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

が成立することが分かります。

より一般には、独立な確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ の特性関数 $\varphi_1(\xi),\ \varphi_2(\xi),\ \cdots,\varphi_n(\xi)$ を用いると、確率変数 $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の特性関数は

$$\varphi(\xi) = \varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)\cdots\varphi_n(\xi)$$

と計算されます。

例 2.3. 例 *2.1* で考えたパラメータ n と p をもつ *2* 項変数 X を考えます。X の特性関数を別の方法で計算しましょう。まず、独立な確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ を

$$P(X_i = 0) = q, \quad P(X_i = 1) = p \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

によって定義します。これらの確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ は 0 と 1 に値をとることに注意します。このとき、*2* 項変数 X は、$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ の和として

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

と書くことができます。このとき X_i の特性関数 $\varphi_i(\xi)$ は

$$\varphi_i(\xi) = e^{i0\xi}q + e^{i1\xi}p = q + pe^{i\xi}$$

と計算されます。このことから *2* 項変数 X の特性関数は

$$\varphi(\xi) = (\varphi_1(\xi))^n = (q + pe^{i\xi})^n$$

と求めることができます。

例 2.4. 独立な確率変数 $X_1,\ \cdots,\ X_n$ がパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従うとします。確率変数

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

の特性関数は、X_i の特性関数 $\varphi(\xi)$ は

$$\varphi_i(\xi) = \frac{\lambda}{\lambda - \sqrt{-1}\xi}$$

を用いて

$$\varphi(\xi) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \sqrt{-1}\xi}\right)^n$$

と計算されます。このことを用いて Z の確率密度関数を計算します。パラメータ $\lambda > 0$ の指数分布の確率密度関数

$$f(x) = Y(x)\lambda \cdot e^{-\lambda x}$$

を用いると

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{i\xi x} e^{\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\xi}$$

が X_i の特性関数です。この両辺を ξ に関して $(n-1)$ 回微分します。

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} ixe^{-\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i}{(\lambda - i\xi)^2}$$

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^2 \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^2 x^2 e^{-\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^2 \cdot 2}{(\lambda - i\xi)^3}$$

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^3 \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^3 x^3 e^{-\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^3 \cdot 3!}{(\lambda - i\xi)^4}$$

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1} \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^{n-1} x^{n-1} e^{-\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^{n-1} \cdot (n-1)!}{(\lambda - i\xi)^n}$$

から

$$\lambda \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{(n-1)!}{(\lambda - \sqrt{-1}\xi)^n}$$

を得ます。Z の特性関数が右辺となるようにすると

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \sqrt{-1}\xi}\right)^n$$

となります。特性関数の一意性から Z の確率密度関数が

$$f_n(z) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} Y(x)$$

で与えられることが分かりました。

2.5.1 正規変数の特性関数

まず標準正規変数について考えます。すなわち期待値 0、標準偏差 1 の正規変数 X について考えます。X の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

で与えられます。正規変数 X の特性関数を計算します。そのために Taylor 展開

$$\cos(x\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\xi^{2k}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\xi^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot E[X^2 k] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \Gamma(k+\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

となります。最後の無限和を計算するために $\Gamma(k+\frac{1}{2})$ を計算します。すなわち

$$\begin{aligned}
\Gamma(k+\frac{1}{2}) &= (k-\frac{1}{2})\Gamma(k-\frac{1}{2}) \\
&= (k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\Gamma(k-\frac{3}{2}) \\
&= \cdots = (k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \\
&= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^k}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

を得ます。これを $\hat{f}(\xi)$ の式に代入して

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^k} \sqrt{\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{2^k \cdot k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\xi^2}{2} \right)^k = e^{-\frac{\xi^2}{2}}
\end{aligned}
$$

が従います。ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2k)!} &= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2k(2k-1)(2k-2) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
&= \frac{1}{2k(2k-2)(2k-4)\cdots 4 \cdot 2} = \frac{1}{2^k k!}
\end{aligned}
$$

と計算しました。以上で標準正規変数 X の特性関数は

$$
\varphi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}
$$

となることを示しました。

次に一般の正規変数に対する特性関数を計算します。そのために、少し一般的な注意をします。

確率変数 X が確率密度関数 $f(x)$ を持つとします。このとき正の定数 $\lambda > 0$ に対して確率変数 $Y = \lambda X$ を定義すると、その確率密度関数は

$$
\frac{1}{\lambda} f(\lambda y)
$$

で与えられます。実際、このことは

$$
\begin{aligned}
P(a \leq Y \leq b) &= P(\frac{a}{\lambda} \leq X \leq \frac{b}{\lambda}) \\
&= \int_{\frac{a}{\lambda}}^{\frac{b}{\lambda}} f(x) dx \\
&= \int_a^b f(\frac{y}{\lambda}) \frac{1}{\lambda} dy
\end{aligned}
$$

から従います。

他方、確率変数 X が確率密度関数 $f(x)$ を持つとします。このとき実定数 m に対して、確率変数 $Y = X + m$ を定義すると、その確率密度関数は

$$
f(y - m)
$$

で与えられます。

以上の注意から、確率変数 X を用いて $Z = \sigma X + m$ と新たな確率変数を導入すると、その確率密度関数は、X の確率密度関数 $f(x)$ を用いて

$$\frac{1}{\sigma} \cdot f\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)$$

で与えられます。この確率変数 Z の特性関数 $\varphi(\xi)$ は X の特性関数 $\hat{f}(\xi)$ を用いて次のように計算されます。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \cdot f\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma x+m)\xi} \cdot f(x)dx \\ &= e^{im\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x\xi} \cdot f(x)dx \\ &= e^{im\xi}\hat{f}(\sigma\xi) \end{aligned}$$

と計算されます。

ここで Z を期待値 m、標準偏差 σ の正規変数とします。すると、Z は標準正規変数 X を用いて

$$Z = \sigma X + m$$

と書くことができますこのことを用いると、Z の特性関数は

$$\varphi(\xi) = e^{im\xi}e^{-\frac{\sigma^2}{2}\xi^2}$$

となることがわかります。

つぎに Z_i が、期待値 m_i、標準偏差 σ_i の正規変数とします。Z_1 と Z_2 が独立とするときに、$Z = Z_1 + Z_2$ によって新たな確率変数を導入します。このとき Z の特性関数は

$$\varphi_(\xi) = e^{im_1\xi}e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}\xi^2} \cdot e^{im_2\xi}e^{-\frac{\sigma_2^2}{2}\xi^2} = e^{i(m_1+m_2)\xi}e^{-\frac{\sigma_3^2}{2}\xi^2}$$

と計算されます。ここで

$$\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

によって σ_3 を計算しました。特性関数が、確率分布から一意的に定まることを認めると確率変数 Z は期待値 $m_1 + m_2$、標準偏差 σ_3 の正規変数であることが示されました。