

Philip Reny “Arrow’s theorem and the Gibbard-Satterthwaite theorem: a unified approach” *Economics Letters* 70 (2001) 99-105

のあらすじ<sup>a</sup>

Theorem A (Muller-Satterthwaite)

Theorem B (Arrow)

$|A| \geq 3$ ,  $f : \mathcal{L}^N \rightarrow A$  satisfies  
Weak Pareto and MON  
then  $f$  is dictatorial.

$|A| \geq 3$ ,  $F : \mathcal{L}^N \rightarrow \mathcal{L}$  satisfies  
Weak Pareto and IIA  
then  $F$  is dictatorial.

<sup>a</sup>ただし social welfare function の値域を linear order にしてある

Step 1: 任意の  $a, b \in A$  ( $a \neq b$ ) を固定する。

$\succ^{(0)} := (\succ_1^{(0)}, \dots, \succ_N^{(0)}) \in \mathcal{L}^N$  で

$\succ_1^{(0)}$	$\dots$	$\succ_{n-1}^{(0)}$	$\succ_n^{(0)}$	$\succ_{n+1}^{(0)}$	$\dots$	$\succ_N^{(0)}$	social choice	social order
$a$	$\dots$	$a$	$a$	$a$	$\dots$	$a$		$a$
$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\cdot$				$a$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$b$	$\dots$	$b$	$b$	$b$	$\dots$	$b$		$\vdots$

となるものを一つとる。

↑ Weak Pareto より

個人 1 からはじめて、他の選択肢間の順序は  $\succ_i^{(0)}$  から変えず、 $b$  を 1 ランクずつ上げていく。 $a$  より下である限り、社会的帰結は変わらないが、 $b$  がトップに来たとき、変わるかもしれない。個人 1 で変わらなかったら、個人 2 でも同様にする。

すると、どこかの  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  で  $b$  がトップに来たとき社会的帰結がひっくりかえる。(そうでないと Weak Pareto に矛盾する。)

ひっくりかえる直前： $\succ^{(1)}$

$\succ_1^{(0)'}$	...	$\succ_{n-1}^{(0)'}$	$\succ_n^{(0)}$	$\succ_{n+1}^{(0)}$	...	$\succ_N^{(0)}$	social choice	social order
<b>b</b>	...	<b>b</b>	<i>a</i>	<i>a</i>	...	<i>a</i>		<i>a</i>
<i>a</i>	...	<i>a</i>	<i>b</i>				<i>a</i>	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		<i>b</i>
	...	...	...	<i>b</i>	...	<i>b</i>		⋮

ひっくり返るところの組み合わせ  $\succ^{(2)}$  では

$\succ_1^{(0)'}$	...	$\succ_{n-1}^{(0)'}$	$\succ_n^{(0)'}$	$\succ_{n+1}^{(0)}$	...	$\succ_N^{(0)}$	social choice	social order
<b>b</b>	...	<b>b</b>	<b>b</b>	<i>a</i>	...	<i>a</i>		<b>b</b>
<i>a</i>	...	<i>a</i>	<b>a</b>				<b>b</b>	<b>a</b>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
	...	...	...	<i>b</i>	...	<i>b</i>		

↑ 演習、Weak Pareto

Step 2:  $\succ^{(1)}$  を変えて、 $n$  より番号が小さい個人は  $a$  を最悪に、 $n$  より番号が大きい個人は  $a$  を下から 2 番目に

$\succ_1^{(1a)}$	...	$\succ_{n-1}^{(1a)}$	$\succ_n^{(1a)}$	$\succ_{n+1}^{(1a)}$	...	$\succ_N^{(1a)}$	social choice	social order
$b$	...	$b$	$a$	$\cdot$	...	$\cdot$		$a$
	...		$b$		...		$a$	$b$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\cdot$	...	$\cdot$	$\cdot$	$\mathbf{a}$	...	$\mathbf{a}$		$\vdots$
$\mathbf{a}$	...	$\mathbf{a}$	...	$b$	...	$b$		

↑ MON, IIA

$\succ^{(2)}$  を同様に変えた  $\succ^{(2a)}$  も使う

Step 3:  $c \in A \setminus \{a, b\}$  を考え、 $\succ^{(1a)}$  から以下の  $\succ^{(3)}$  に変更する。

$\succ_1^{(3)}$	...	$\succ_{n-1}^{(3)}$	$\succ_n^{(3)}$	$\succ_{n+1}^{(3)}$	...	$\succ_N^{(3)}$	social choice	social order
.	...	.	$a$	.	...	.		$a$
	...		$\mathbf{c}$		...		$a$	$\vdots$
			$b$					$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{c}$	...	$\mathbf{c}$	.	$\mathbf{c}$	...	$\mathbf{c}$		$\vdots$
$b$	...	$b$	.	$a$	...	$a$		
$a$	...	$a$	...	$b$	...	$b$		

↑ MON, IIA

Step 4:  $n$  より大きい番号の人について  $a$  と  $b$  を  $\succ^{(3)}$  から入れ替える。

$\succ_1^{(4)}$	...	$\succ_{n-1}^{(4)}$	$\succ_n^{(4)}$	$\succ_{n+1}^{(4)}$	...	$\succ_N^{(4)}$	social choice	social order
.	...	.	$a$	.	...	.		$a$
	...		$c$		...		$a$	$c$
			$b$					$b$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$c$	...	$c$	.	$c$	...	$c$		$\vdots$
$b$	...	$b$	.	<b><math>b</math></b>	...	<b><math>b</math></b>		
$a$	...	$a$	...	<b><math>a</math></b>	...	<b><math>a</math></b>		

↑ Weak Pareto,  
MON, IIA

$\succ^{(4)}$  において、 $n$  さんだけが  $a$  をトップにし、他は全員  $a$  が最悪なのに、 $f(\succ^{(4)}) = a$

$n$  さんだけが  $a \succ_n^{(4)} b$  で他の全員は  $b \succ_i^{(4)} a$  なのに、 $aF(\succ^{(4)}) b$

他の人は  $n$  と反対の選好でなくて、任意の選好でも  $n$  の意思が通る。  
(授業で証明)

$a$  について、あるいは  $(a, b)$  について  $n$  は独裁者！

$a, b$  は任意だった。独裁者が選択肢によって変わると矛盾なので  $a, b$  をいろいろに変えても、すべて同じ人物！  $\square$