

## 2022年度 ミクロ経済学中級Ib 期末試験(70分)

Takako Fujiwara-Greve

- 以下の問題すべてに答えなさい。解答は問題順でなくてもよいが、どの問題に答えているのかを明確に。
- 途中点があるので、論理の過程を読み手にわかるように書くこと。

1. One-to-one マッチング問題で、 $G_1$  と  $G_2$  は同人数であると仮定する。授業で紹介した Knuth の定理は以下であった。

定理：全ての  $a \in G_1$  と  $X \in G_2$  が相手の集合について無差別を含まない強い選好順序をもっているとき、任意の二つの安定な assignments  $f, g$  について

$$\{\forall a \in G_1, f(a) \succ_a g(a)\} \iff \{\forall X \in G_2, g^{-1}(X) \succ_X f^{-1}(X)\}.$$

この問では、 $\Rightarrow$  だけを考える。(逆はほぼ同じようにできる。)

背理法の仮定として、任意の  $\forall a \in G_1$  について  $f(a) \succ_a g(a)$  なのに、ある  $X \in G_2$  が存在して、 $f^{-1}(X) \succ_X g^{-1}(X)$  であったとする。このとき矛盾が発生することを証明しなさい。

2. 社会的選択関数とは社会を構成する個人 ( $1, 2, \dots, N$  とする) の選好順序を集計して、1つの選択肢を選ぶ関数であった。以下では個人の選好は無差別を含まない強い選好順序の集合  $\mathcal{L}$  の中にあるものとし、社会的選択関数の集合は  $A$  とする。 $N \geq 2$ 、 $|A| \geq 3$  を仮定する。

定義：社会的選択関数  $f: \mathcal{L}^N \rightarrow A$  が匿名性 (anonymity) を満たすとは、

任意の  $(\succ_1, \dots, \succ_N) \in \mathcal{L}^N$  と任意の 1 対 1 対応  $\pi: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  (個人の名前番号の並べ替え) について、

$$f(\succ_1, \dots, \succ_N) = f(\succ_{\pi(1)}, \dots, \succ_{\pi(N)})$$

が成立すること。

定義：社会的選択関数  $f: \mathcal{L}^N \rightarrow A$  が非独裁性を満たすとは、以下の性質を満たす  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  が存在しないこと。

任意の  $\succ := (\succ_1, \dots, \succ_N) \in \mathcal{L}^N$  と任意の  $x \in A$  について

$$[x \succ_n y \text{ for any } y \in A \setminus \{x\}] \Rightarrow f(\succ) = x$$

社会的選択関数が匿名性を満たすならば非独裁性を満たすことを証明しなさい。

3. VCG メカニズムにおいて参加者が共謀する可能性を考える。参加者を  $1, 2, 3$  とする。社会的意思決定は、2つの財 (ピカソの絵とダリの絵) を誰に配分するかであり、簡単化のため、 $x_{12}$  とは 1 さんに 2 つのうち一つの絵を、2 さんにもう一つの絵を配分するという、 $x_3$  とは 3 さんに両方の絵を配分するということとし、このどちらかしか選べないとする。3 人は準線形効用を持っているとし、配分が  $x$  で、もらう金額が  $t_i$  のとき、 $u_i(x, t_i) = v_i(x) + t_i$  という形の総効用を得るとする。具体的には、配分からの直接的な効用は以下であるとする。

$$1 \text{ さん} : v_1(x_{12}) = 2, v_1(x_3) = 0$$

$$2 \text{ さん} : v_2(x_{12}) = 2, v_2(x_3) = 0$$

$$3 \text{ さん} : v_3(x_{12}) = 0, v_3(x_3) = 10$$

- (a) VCG メカニズムを使うとして、各参加者  $i = 1, 2, 3$  が正直に直接的効用の関数  $(v_1, v_2, v_3)$  を表明したときの各自の contribution を求めなさい。さらに pivot mechanism (contribution をもらう) であるときの各参加者の総効用  $u_i$  を求めなさい。途中の計算も書くこと。
- (b) 1 さんと 2 さんが共謀して嘘をつき、 $\tilde{v}_1(x_{12}) = 9$ 、 $\tilde{v}_2(x_{12}) = 9$  である (他は正直に  $\tilde{v}_i(x_3) = 0$  for  $i = 1, 2$ ) と表明したとする。3 さんはそれを知らないので正直に行動する。このときの pivot mechanism における配分結果とそこから得られる各参加者の (真実の) 総効用  $u_i$  を求めなさい。途中の計算も書くこと。