

2022年度 ミクロ経済学中級Ib 第2回演習

Takako Fujiwara-Greve

VCGメカニズムの strategy-proofness について公共財供給の文脈で確認する。

社会の構成員は $1, 2, \dots, n$ 、この他に政府 (0番) がいて、政府は費用 $C > 0$ (円) をかけて公共財を供給することができるとする。

社会的意思決定は $x = 1$ (費用 $C > 0$ をかけて公共財を作る) または $x = 0$ (公共財を作らないし費用もかからない) の2択とする。

各構成員 $i = 1, 2, \dots, n$ の効用関数は準線形とし、公共財の状況が x のときに t_i 円をもらった場合 (t_i が正とは言っていない)、 $u_i = v_i(x) + t_i$ とする。ここで $v_i : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ は関数ではあるが、簡単化のため $v_i(0) = 0$ for all $i = 1, 2, \dots, n$ とする。つまり $v_i(1)$ が決まれば確定する。

以下のような VCG メカニズムを考える。

Step 1: 政府以外の構成員 $i = 1, 2, \dots, n$ に公共財からの効用 $v_i(1)$ の数値を表明してもらおう。政府は正直な「構成員」と考えて、 $v_0(1) = -C$, $v_0(0) = 0$ を必ず表明すると仮定する。

Step 2: $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ が表明された効用関数の組み合わせであるとき (正直な政府の v_0 も含めて)、

$$x(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n) = 1 \iff \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j(1) - C \geq 0 (= \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j(0) + 0)$$

で公共財供給のルールとする。

Step 3: $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ が表明された効用関数の組み合わせであるとき、 i さんがいない場合の公共財供給についても調べておく。これは、

$$x(\tilde{v}_{-i}) = x(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{i-1}, \tilde{v}_{i+1}, \dots, \tilde{v}_n) = 1 \iff \sum_{j \neq i, 0} \tilde{v}_j(1) - C \geq 0$$

で決まる。ここから i さんの (他の人たちへの) contribution を計算し、それに定数値を加えたものを i さんがもらう金額とするのが VCG メカニズムである。

- $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ が表明されたとき、 i さんの contribution t_i を場合分けした表を完成させなさい。

	$\sum_{j \neq i, 0} \tilde{v}_j(1) \geq C$	$\sum_{j \neq i, 0} \tilde{v}_j(1) < C$
$\tilde{v}_i(1)$	$t_i = 0$	$t_i = [\sum_{j \neq i, 0} \tilde{v}_j(1) - C]$
$+\sum_{j \neq i, 0} \tilde{v}_j(1) \geq C$		$-\sum_{j \neq i, 0} [0 - 0]$
$\tilde{v}_i(1)$	問1	$t_i = 0$
$+\sum_{j \neq i, 0} \tilde{v}_j(1) < C$		

- i さんがもらえるのは contribution だけだとする。(これは pivot mechanism と呼ばれる。)

$\sum_{j \neq i, 0} \tilde{v}_j(1) \geq C$ の場合について、 i さんが真実の v_i を表明することが最適であることを証明しなさい。

- $n = 2$, $C = 400$ 、(政府でない) 構成員 $i = 1, 2$ さんの真実の効用が $v_1(1) = 300$, $v_2(1) = 200$ のケースで、VCG メカニズムを使用したとき、公共財は供給されるか、またそのときの構成員 $i = 1, 2$ さんの contribution をそれぞれ求めなさい。