2021 年度　ミクロ経済学中級 Ib 期末試験 (70 分)

Takako Fujiwara-Greve

- 以下の問題すべてに答えなさい。解答は問題順でなくてもよいが、どの問題に答えているのかを明確に。
- 途中点があるので、論理の過程を読み手にわかるように書くこと。

1. 2 財の経済を考える。消費者の効用関数が単調性を満たすとは、全ての財の量が増えた時、厳密に効用が上がることである。財ベクトルで書くと全ての財の量が増えるとは $\mathbf{x} < \mathbf{x}'$ と書くので、

$$\mathbf{x} < \mathbf{x}' \Rightarrow u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}')$$

ということである。

価格ベクトル $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$ と初期保有 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2_+$（かつ少なくとも一つの財について $\omega_j > 0$) の下で需要ベクトル（予算制約の下で効用を最大にする財ベクトル）を $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$ と書き、その第 j 座標を $x^*_j(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$ と書くと、効用関数が単調性を満たす消費者は所得を使い切る、すなわち

$$p_1 x^*_1(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}) + p_2 x^*_2(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}) = p_1\omega_1 + p_2\omega_2$$

であることを証明しなさい。（図解でもよい。）

2. 授業でやった Arrow の不可能性定理の証明の最後の部分を完成させる。$\mathcal{L}$ を社会的選択対象の集合上の強い選好順序全体の集合とし $F : \mathcal{L}^N \to \mathcal{L}$ は社会的厚生関数で、IIA, Weak Pareto を満たすと仮定する。

Step 4 において、

$\succ^{(4)}_1$	$\cdots$	$\succ^{(4)}_{n-1}$	$\succ^{(4)}_n$	$\succ^{(4)}_{n+1}$	$\cdots$	$\succ^{(4)}_N$	social order
$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$	a	$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$	a
	$\cdots$		c		$\cdots$		c
			b				b
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c	$\ldots$	c	$\cdot$	c	$\ldots$	c	
b	$\ldots$	b	$\cdot$	b	$\ldots$	b	
a	$\ldots$	a	$\ldots$	a	$\cdots$	a	

であった。

n さんが (a, c) ペアについて独裁者であることを証明するため、任意の $\succsim = (\succsim_1, \ldots, \succsim_N)$ で $a \succsim_n c$ であるものをとる。

また、新たな選好の組み合わせ $\succ^{(6)}$ として、n さんは上から a, b, c の順であとは $\succsim_n$ と同じ、他の $i \neq n$ さんは b をトップにしてあとは $\succsim_i$ と同じというものを考える。（だいたいのイメージは以下。）

$\succ^{(6)}_1$	$\cdots$	$\succ^{(6)}_{n-1}$	$\succ^{(6)}_n$	$\succ^{(6)}_{n+1}$	$\cdots$	$\succ^{(6)}_N$
b	$\cdots$	b	a	b	$\cdots$	b
$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$	b	$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$	c	$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdot$

(a) $F(\succ^{(4)})$ が a をトップ、c を二位、b を 3 位にしているということ、F が IIA, Weak Pareto を満たすこと, $F(\succ^{(6)})$ の推移性を使って $aF(\succ^{(6)})c$ となることを証明しなさい。

(b) $aF(\succsim)c$ であることを証明しなさい。（(a) ができなくても $aF(\succ^{(6)})c$ を仮定して証明してよい。）

3. １単位の財があり、２人の消費者 (A さん、B さん）のどちらかに配分するという状況で VCG mechanism を使用するとき、budget balance が保証されない (２人の VCG payment を足すと 0 にならないことがある）ことを以下の設問に答えながら確認しなさい。

decision の集合は $X = \{A, B\}$ と書くことにし $x = A$ が A さんが財をもらうこと、$x = B$ が B さんが財をもらうことである。

２人は quasi-linear utility function を持っており、$x \in X$ で p_i を支払うときの i さんの効用は $u_i = v_i(x) - p_i$ とする。簡単化のために、x の下で財をもらわなかったときの $v_i(j) = 0$ $(j \neq i)$ とすると表明するのは財をもらった時の評価額 $v_i(i)$ ということになる。

A さんの $v_A(A)$ は 2 通りの可能性があり、$v_A(A) \in \{1, 3\}$。B さんの $v_B(B)$ も 2 通りの可能性があり、$v_B(B) \in \{2, 4\}$ であるとする。すると２人の表明を並べたベクトル v には 4 通りのケースがある。（また、i さんの部分を v ベクトルから取り除いたものを v_{-i} と書く。）

Case 1: $v = (v_A(A), v_B(B)) = (1, 2)$

Case 2: $v = (v_A(A), v_B(B)) = (1, 4)$

Case 3: $v = (v_A(A), v_B(B)) = (3, 2)$

Case 4: $v = (v_A(A), v_B(B)) = (3, 4)$

Case 1 のときを考える。VCG mechanism では２人とも真実の $v_i(i)$ を表明し、二人の評価額の和を最大にするように decision が行われるため $x^*(1, 2) = \mathrm{argmax}_{x \in X} v_A(x) + v_B(x) = B$ である。

A さんの VCG payment を求めるには、A さんがいないときの最適 decision が $x^*(v_{-A}) = x^*(2) = B$（B さんしか参加していないときも B さんが財を得る）であることから

$$p_A(1, 2) = v_B(B) - v_B(B) + h_A(2) = h_A(2).$$

ここで $h_A(2)$ とは B さんが $v_B(B) = 2$ を表明しているときに A さんが払う VCG payment のコンスタント項である。

同様に、B さんの VCG payment を求める。B さんがいないときの最適 decision は $x^*(v_{-B}) = x^*(1) = A$ となり

$$p_B(1, 2) = v_A(A) - v_A(B) + h_B(1) = 1 + h_B(1).$$

もし budget balance $p_A(1, 2) + p_B(1, 2) = 0$ が成立しているとすると

$$h_A(2) + 1 + h_B(1) = 0 \qquad (1)$$

が成立していないとならない。

(a) Case 2 についても同様の計算をして $p_A(1, 4) + p_B(1, 4) = 0$ となるような $h_A(4)$ と $h_B(1)$ が満たすべき式を求めなさい。

(b) Case 3 についても同様の計算をして $p_A(3, 2) + p_B(3, 2) = 0$ となるような $h_A(2)$ と $h_B(3)$ が満たすべき式を求めなさい。

(c) Case 4 についても同様の計算をして $p_A(3, 4) + p_B(3, 4) = 0$ となるような $h_A(4)$ と $h_B(3)$ が満たすべき式を求めなさい。

(d) (1) 式と (a), (b), (c) で求めた 3 つの式を同時に満たす $h_A(2), h_A(4), h_B(1), h_B(3)$ が存在しないことを示しなさい。