2016年度　ミクロ経済学初級 第3回演習解答

グレーヴァ香子担当クラス

1. (a) 解法１：f を第１財で偏微分すると限界生産力は $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = \frac{1}{3}(x_1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x_2)^{\frac{1}{3}}$、第２財で偏微分すると $f_2 = \frac{1}{3}(x_1)^{\frac{1}{3}} \cdot (x_2)^{-\frac{2}{3}}$ より、限界変形率（あるいは技術的限界代替率）は

$$MRT = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{3}(x_1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x_2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}(x_1)^{\frac{1}{3}} \cdot (x_2)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{x_2}{x_1}.$$

価格比と一致するところで費用が最小になるので、

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2} \iff \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{8} \iff x_2 = \frac{1}{8}x_1$$

を満たす (x_1, x_2) で生産するのがよい。y 単位作るには、まずどちらかに統一して、

$$y = (x_1)^{\frac{1}{3}} \cdot (x_2)^{\frac{1}{3}} = (x_1)^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{x_1}{8})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(x_1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_1^*(y) = (2y)^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}}.$$

ゆえに

$$x_2^*(y) = \frac{2\sqrt{2}}{8}y^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}y^{\frac{3}{2}}.$$

（数学的に同値な表現はすべて正解。）総費用は

$$TC(y) = 1 \cdot x_1^*(y) + 8 \cdot x_2^*(y) = 4\sqrt{2} \cdot y^{\frac{3}{2}}.$$

解法２：ラグランジェ関数を作る。

$$\mathcal{L} = x_1 + 8 \cdot x_2 + \lambda\{y - (x_1)^{\frac{1}{3}} \cdot (x_2)^{\frac{1}{3}}\}$$

一階の条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 - \lambda\frac{1}{3}(x_1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x_2)^{\frac{1}{3}} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 8 - \lambda\frac{1}{3}(x_1)^{\frac{1}{3}} \cdot (x_2)^{-\frac{2}{3}} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - (x_1)^{\frac{1}{3}} \cdot (x_2)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

(1), (2) より λ を消去すると $x_2 = \frac{1}{8}x_1$ が出るのであとは同じ。

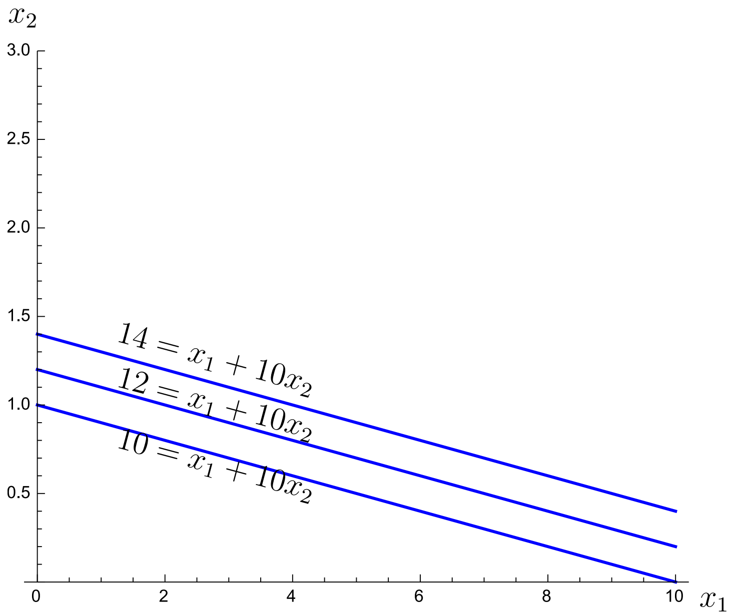
(b) 等量曲線はＬ字型になるので、費用を最小にするにはちょうど $3x_1 = 2x_2$ となる組み合わせで生産すればよい。y 単位作るには $y = 3x_1$ かつ $y = 2x_2$ を解く。従って

$$x_1^*(y) = \frac{y}{3},\ x_2^*(y) = \frac{y}{2}.$$

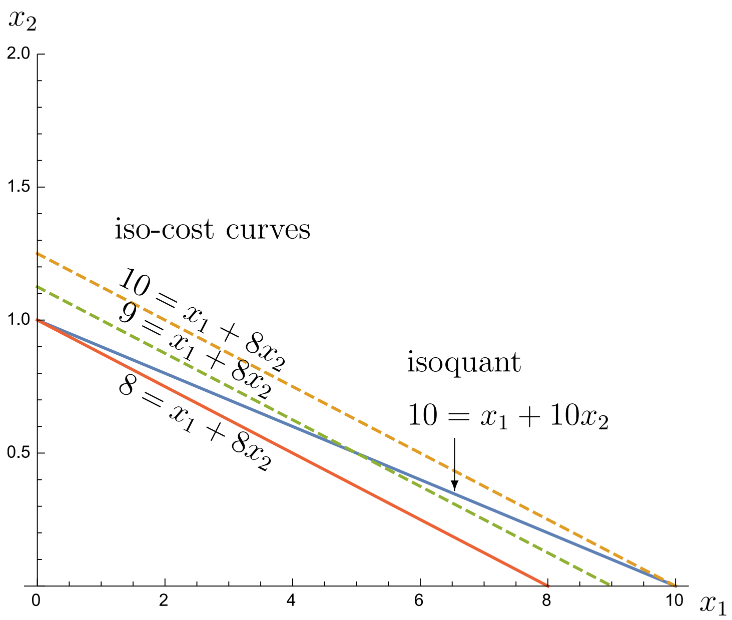
総費用は

$$TC(y) = \frac{y}{3} + 8 \cdot \frac{y}{2} = \frac{13}{3}y.$$

(c) 図で考える。等量曲線は右下がりの直線である。



y を一つ固定すると等量曲線が１本決まり、等費用線の切片が最も小さくなるものを求める。図は $y = 10$ に固定したときの等量曲線を青い直線で描いている。オレンジ、緑と等費用線を下げていって、赤線が最も費用が安い。



つまり、第２財は第１財の８倍もの価格であるが、限界生産力は１０倍であるから、第２財のみで生産するのが費用を最小にする。すなわち、

$$x_1^*(y) = 0,\ y = 10x_2 \Rightarrow x_2^*(y) = \frac{y}{10}.$$

総費用は

$$TC(y) = 8 \cdot \frac{y}{10} = \frac{4}{5}y.$$

2. (a) 一階の条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = r_1 - \lambda\alpha(x_1)^{\alpha-1}\cdot(x_2)^{\beta} = 0 \tag{3}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = r_2 - \lambda\beta(x_1)^{\alpha}\cdot(x_2)^{\beta-1} = 0 \tag{4}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - (x_1)^{\alpha}(x_2)^{\beta} = 0. \tag{5}$$

λ を消去して

$$\lambda = \frac{r_1}{\alpha(x_1)^{\alpha-1}\cdot(x_2)^{\beta}} = \frac{r_2}{\beta(x_1)^{\alpha}\cdot(x_2)^{\beta-1}} \iff \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

$x_2 = \frac{\beta r_1}{\alpha r_2}\cdot x_1$ として、(5) に代入

$$y = (x_1)^{\alpha}(\frac{\beta r_1}{\alpha r_2}\cdot x_1)^{\beta} = (\frac{\beta r_1}{\alpha r_2})^{\beta}(x_1)^{\alpha+\beta} \Rightarrow x_1^*(y) = (\frac{\alpha r_2}{\beta r_1})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\cdot y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

ゆえに、

$$x_2^*(y) = \frac{\beta r_1}{\alpha r_2}\cdot(\frac{\alpha r_2}{\beta r_1})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\cdot y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = (\frac{\alpha r_2}{\beta r_1})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1}\cdot y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

(b) 総費用は

$$TC(y) = r_1(\frac{\alpha r_2}{\beta r_1})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\cdot y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + r_2(\frac{\alpha r_2}{\beta r_1})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1}\cdot y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = A\cdot y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

と表せる。($A = r_1(\frac{\alpha r_2}{\beta r_1})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r_2(\frac{\alpha r_2}{\beta r_1})^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1}$ は定数で、以下の分析にはまとめてしまって問題ない。）利潤は

$$\Pi(y) = py - A\cdot y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

と書けるので、y で微分すると、

$$\Pi'(y) = p - \frac{A}{\alpha+\beta}\cdot y^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1}$$

なので、$\Pi'(0) = p > 0$ が保証されている。もう一回微分すると

$$\Pi''(y) = -\frac{A}{\alpha+\beta}(\frac{1}{\alpha+\beta}-1)\cdot y^{\frac{1}{\alpha+\beta}-2}$$

なので、($\alpha, \beta > 0$ より） $y > 0$ の範囲で $\Pi''(y) < 0$ になるには

$$\frac{1}{\alpha+\beta} - 1 > 0 \iff \alpha+\beta < 1.$$