2023年度　ゲームの理論 a 演習第2回　解答

Takako Fujiwara-Greve

1. (a) 誘導標準形は３人ゲームなので２つの表となる。利得は第１座標がプレイヤー１、第２座標がプレイヤー２，第３座標がプレイヤー３のものとする。以下のものと本質的に同じ表ならばよい。

$1 \setminus 2$	A	B
U	0, 2, 0	$\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{1}$
D	$\underline{1}$, $\underline{0}$, $\underline{1}$	1, $\underline{0}$, $\underline{1}$

3: L

$1 \setminus 2$	A	B
U	$\underline{2}$, 2, $\underline{1}$	0, $\underline{4}$, 0
D	1, $\underline{0}$, $\underline{1}$	$\underline{1}$, $\underline{0}$, $\underline{1}$

3: R

最適反応の利得に下線をひいてある。純戦略によるナッシュ均衡は３つあり、(D,A,L), (U,B,L), (D,B,R) である。

(b) この部分ゲームは同時ゲームとみなせるので、また戦略形で書いてみる。利得は第１座標がプレイヤー２のもの、第２座標がプレイヤー３のものである。

$2 \setminus 3$	L	R
A	2, 0	2, $\underline{1}$
B	$\underline{3}$, $\underline{1}$	$\underline{4}$, 0

最適反応に下線をひいてある。この部分ゲームにおける純戦略によりナッシュ均衡は唯一つで、(B,L) である。

(c) (b) より、もしプレイヤー１が U を選ぶと、その後は (B,L) にならなければならないので、プレイヤー１は利得２を予想できる。これは D を選んだときの利得１より高いので、プレイヤー１の最適戦略は U である。

従って純戦略による部分ゲーム完全均衡は唯一つあり、それは (U,B,L) である。

（他のナッシュ均衡は、プレイヤー１が最初に D を選ぶので、プレイヤー２と３の情報集合には行かない。つまり彼らの戦略は「経路外」であり、そこで D が最適になるような組み合わせが成立してしまっているという「空脅し」の均衡である。）

2. (a) 企業 i が q_i 単位生産し、他社が q_j 単位生産したときの企業 i の利潤は

$$\Pi_i(q_i, q_j) = P(q_i, q_j)q_i - TC_i(q_i) = \{10 - (q_i + q_j)\}q_i - 2q_i$$

である。これは q_i の二次関数で上に凸であるから、一階の条件を調べれば相手の q_j に対する最適反応が以下のように求められる。

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = 10 - q_j - 2 - 2q_i = 0 \iff BR_i(q_j) = \frac{1}{2}(8 - q_j) = 4 - \frac{q_j}{2}$$

連立して解いて、１回限りのクールノー（ナッシュ）均衡の生産量の組み合わせは

$$(q_1^*, q_2^*) = (\frac{8}{3}, \frac{8}{3}).$$

このときの企業１の利潤は

$$\Pi_1(q_1^*, q_2^*) = \{10 - (\frac{8}{3} + \frac{8}{3})\}\frac{8}{3} - 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{64}{9}.$$

(b) 独占の場合の利潤は $\Pi(Q) = (10-Q)Q - 2Q$ である。これも Q に関して上に凸の関数なので、一階の条件から利潤を最大にする生産量は

$$\Pi' = 8 - 2Q = 0 \iff Q^* = 4.$$

このときの利潤は

$$\Pi(4) = (10-4)4 - 2 \cdot 4 = 16.$$

(c) grim-trigger 戦略は、毎期 2 単位をそれぞれの企業が生産し利潤 8 を得るようにするが、もしどちらかの企業が 2 単位でない生産量を選んだら、その後は両企業は $\frac{8}{3}$ 単位を生産し、利潤 $\frac{64}{9}$ をずっと得るようにするということである。

従って、この戦略に両企業が従うときの企業 1 の割引総利得は

$$8 + \delta \cdot 8 + \delta^2 \cdot 8 + \cdots = \frac{8}{1-\delta}.$$

(d) 企業 2 が 2 単位生産しているときに企業 1 が q_1 単位生産すると、企業 1 の 1 期間の利潤は

$$\Pi_1(q_1, 2) = \{10 - (q_1 + 2)\}q_1 - 2q_1$$

である。これを q_1 を動かして最大にするには一階の条件から

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\Pi_1(q_1, 2) = 0 \iff q_1 = 3.$$

つまり、3 単位生産すればよい。このときの 1 期間の利潤は

$$\Pi_1(3, 2) = 9.$$

(e) 逸脱した期とその後の利得の列は $9, \frac{64}{9}, \frac{64}{9}, \ldots$ となるので、割引総和は

$$9 + \delta\frac{64}{9} + \delta^2\frac{64}{9} + \cdots = 9 + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{64}{9}.$$

(f)

$$\frac{8}{1-\delta} \geqq 9 + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{64}{9} \iff \delta \geqq \frac{9}{17}.$$

3. (a) プレイヤー 1 の純戦略は 2 つの情報集合それぞれにおいて一つの行動を選ぶものなので、(Hot の後、Cold の後) と書くとすると、$S_1 = \{(A, A'), (A, B'), (B, A'), (B, B')\}$ 。

プレイヤー 2 は情報集合を 1 つしか持っていないので行動がそのまま純戦略であり、$S_2 = \{L, R\}$。

(b) 今度はどちらのプレイヤーも情報集合を 1 つしか持っていない。

$S_1 = \{A, B\}$

$S_2 = \{L, R\}$