2022年度　ゲームの理論a 演習第1回解答

Takako Fujiwara-Greve

1. (a) （双）行列表現は以下になる。戦略の順序は逆でももちろんよい。

P1 \ P2	Hawk	Dove
Hawk	$(V-C)/2$, $(V-C)/2$	V, 0
Dove	0, V	$V/2$, $V/2$

(b) $V > C$ のとき、Dove は Hawk に厳密に支配される。従って、混合戦略まで考えても、ただ一つのナッシュ均衡が存在し、それは (Hawk, Hawk) である。

(c) $V = C$ のときは、相手が Hawk という純戦略をとっているとき、任意の混合戦略が最適反応となる。しかし、相手が正の確率で Dove を行うならば、Hawk だけが最適反応である。したがって、以下の2種類の無限個のナッシュ均衡がある。（純戦略均衡 (Hawk, Hawk) のところは重複している。また、(Hawk, Dove), (Dove, Hawk) も以下の表現の中に入っている。）

$(p\text{Hawk} * (1-p)\text{Dove},\ \text{Hawk})$ such that $p \in [0,1]$;

$(\text{Hawk},\ q\text{Hawk} * (1-q)\text{Dove})$ such that $q \in [0,1]$.

（注：混合戦略の書き方は他にもいろいろあるので、グレーヴァにわかるように書けていればよい。例えば、最初に「$(p, 1-p)$ と書いて、第1項は Hawk の確率です」と断ってから $(p, 1-p)$ で表現するとか、さらに単純化して、Hawk の確率を p として、p だけで表現することも、宣言しておいてくれればよい。ただし、何も説明せずにどちらかの純戦略の確率だけを書いてくるのは不明瞭なのでやめてほしい。）

(d) $V < C$ のとき。純戦略のナッシュ均衡は (Hawk, Dove) と (Dove, Hawk) である。さらに混合戦略の均衡もあり、それはちょうど Hawk と Dove が同じ期待利得を与えるときなので、相手の混合戦略を $q\text{Hawk} * (1-q)\text{Dove}$ とすると、

$$Eu(H, q\text{Hawk} * (1-q)\text{Dove}) = q\frac{V-c}{2} + (1-q)V$$
$$Eu(D, q\text{Hawk} * (1-q)\text{Dove}) = (1-q)\frac{V}{2}$$

より

$$\begin{aligned} & Eu(H, q\text{Hawk} * (1-q)\text{Dove}) = Eu(D, q\text{Hawk} * (1-q)\text{Dove}) \\ \iff & q\frac{V-C}{2} + (1-q)V = (1-q)\frac{V}{2} \\ \iff & q = \frac{V}{C}. \end{aligned}$$

すなわち、$(\frac{V}{C}\text{Hawk} * (1-\frac{V}{C})\text{Dove},\ \frac{V}{C}\text{Hawk} * (1-\frac{V}{C})\text{Dove})$ という対称な混合戦略均衡も存在する。

2. (a) 利潤は売上から費用を引いた金額であるから、

$$\begin{aligned} u_1(p_1, p_2) &= p_1 D_1(p_1, p_2) - TC(D_1(p_1, p_2)) \\ &= p_1 \max\{5 - p_1 + \frac{1}{2}p_2, 0\} - \max\{5 - p_1 + \frac{1}{2}p_2, 0\} \\ &= (p_1 - 1)\max\{5 - p_1 + \frac{1}{2}p_2, 0\} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} u_2(p_1,p_2) &= p_2 D_2(p_1,p_2) - TC(D_2(p_1,p_2)) \\ &= p_2 \max\{5 - p_2 + \frac{1}{2}p_1, 0\} - \max\{5 - p_2 + \frac{1}{2}p_1, 0\} \\ &= (p_2 - 1)\max\{5 - p_2 + \frac{1}{2}p_1, 0\}. \end{aligned}$$

これらと数学的に同値ならよい。

(b)　反応曲線を求める。$\max\{5 - p_1 + \frac{1}{2}p_2, 0\} = 5 - p_1 + \frac{1}{2}p_2$ の範囲の (p_1, p_2) を仮定して計算し、実際にベルトラン均衡においてこの条件が満たされることを後で確認する。この条件の下では、各企業の利潤（利得）は自社価格（自分の戦略）に関して二次関数で、上に凸である。したがって、

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = 5 - p_1 + \frac{1}{2}p_2 - (p_1 - 1) = -2p_1 + 6 + \frac{1}{2}p_2.$$

から一階の条件を求め、

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = 0 \iff p_1 = 3 + \frac{1}{4}p_2$$

が $u_1(\cdot, p_2)$ の最大値を与える。

企業 2 はまったく対称的なので、

$$\frac{\partial u_2}{\partial p_2} = 0 \iff p_2 = 3 + \frac{1}{4}p_1$$

が u_2 の最大値を与える。

連立して解いて、

$$p_1^* = p_2^* = 4.$$

このとき、たしかに $5 - p_1^* + \frac{1}{2}p_2^* > 0,\ 5 - p_2^* + \frac{1}{2}p_1^* > 0$ が満たされている。

(c) ナッシュ均衡であることを証明するには、企業 $i = 1, 2$ がライバルの価格 $p_j^* = 4 (j \neq i)$ のときに、自社だけ他の価格 $p_i \neq 4$ に変更しても利得（利潤）が上昇しないことを示せば良い。(b) で、$p_i = 3 + \frac{1}{4}p_j\ (j \neq i)$ は相手の価格が p_j のときに u_i の最大値を与えることを示したので、これがまさにナッシュ均衡であることの証明となっている。 □

(だいたい上のようなことが書いてあればよい。)