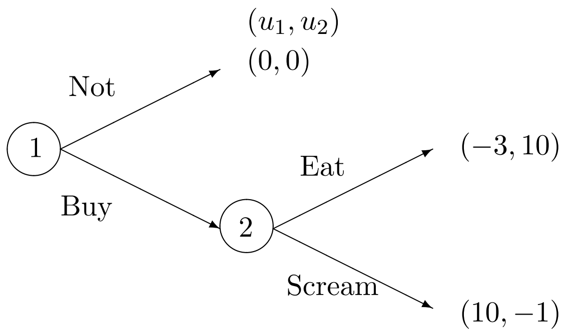
2017年度　ゲームの理論 a 演習第2回解答

Takako Fujiwara-Greve

1. (a) 樹形図は以下。各情報集合は１点の意思決定点から成る。



(b) 各プレイヤーは１点の意思決定点からなる情報集合を一つだけもっているので、行動すなわち純戦略である。したがって誘導標準形は以下。最適反応に対応する利得の数値に下線をつけてある。

男１ \ 男２	Eat	Scream
Buy	-3, $\underline{10}$	$\underline{10}$, -1
Not	$\underline{0}$, $\underline{0}$	0, $\underline{0}$

この標準形の純戦略ナッシュ均衡は (Not, Eat) だけである。
混合戦略の範囲を考える。男２が Eat をする確率を q とすると、男１の各純戦略の期待利得は

$$Eu_1(Buy, q) = (-3)q + (1-q)10$$
$$Eu_1(Not, q) = 0$$

であるから、最適反応は

$$BR_1(q) = \begin{cases} \{Buy\ (p=1)\} & \text{if } q < \frac{10}{13} \\ \Delta(\{Buy,\ Not\}) & \text{if } q = \frac{10}{13} \\ \{Not\ (p=0)\} & \text{if } q > \frac{10}{13} \end{cases}$$

また、男２にとって、相手が Buy を確率 0 でとるとき以外、 Eat が Scream より高い利得を与える（これは Scream が Eat に「弱く支配されている」[1]と言う。）したがって、男１が Buy をする確率を p とすると、最適反応は

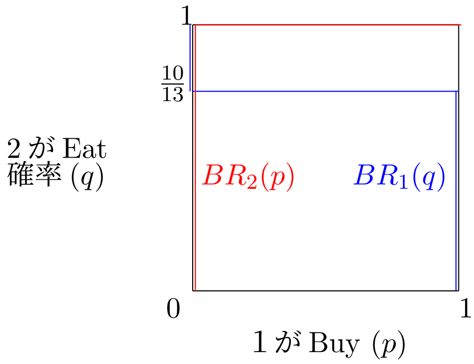
$$BR_2(p) = \begin{cases} \Delta(\{Eat,\ Scream\}) & \text{if } p = 0 \\ \{Eat\ (q=1)\} & \text{if } p > 0. \end{cases}$$

これらをプロットして交点を求める。

[1]定義：プレイヤー i の戦略 s_i が戦略 s_i' に弱く支配される(s_i is weakly dominated by s_i') とは

(1) 他のプレイヤーの任意の戦略の組 s_{-i} について、$u_i(s_i, s_{-i}) \leqq u_i(s_i', s_{-i})$

(2) かつ、少なくとも一つの戦略の組み合わせ $\tilde{s}_{-i}$ について、$u_i(s_i, \tilde{s}_{-i}) < u_i(s_i', \tilde{s}_{-i})$ が成立することである。



従って、混合戦略の範囲ではナッシュ均衡は無限個あって、全てを書くと以下の集合になる。

$$\{(\text{Not},\ q\,\text{Eat} + (1-q)\,\text{Scream}) \mid \frac{10}{13} \leqq q \leqq 1\}$$

（この中に純戦略の均衡も入っている。）

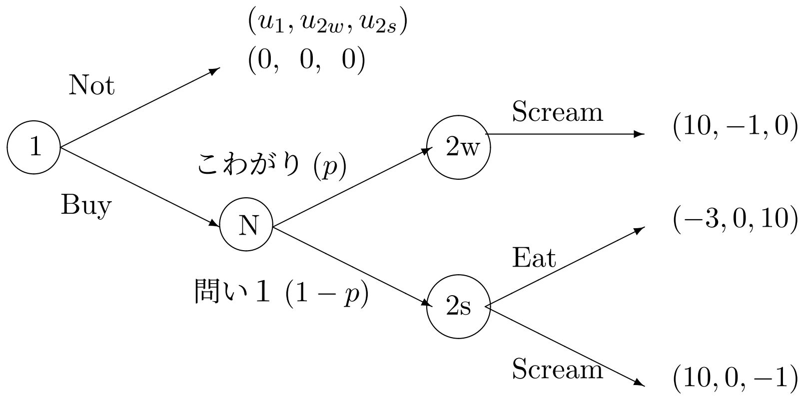
この例からゲーム理論的に言えることは、「弱く支配されている戦略を消してしまうと、ナッシュ均衡を消してしまうことがある」ということである。気をつけよう！

落語的には、男 2 が「空脅し」をして男 1 にまんじゅうを買わせる均衡は一つもないということ。

(c) 後ろ向きの帰納法で考える。最後の意思決定者である男 2 の手番での最適行動は Eat である。一つ戻って男 1 の手番での最適行動は Not となり、均衡は (Not, Eat) である。

というわけで、完備情報だったらどう考えても落語のようなことは起こらないはずなのである。

2. (a) 新しい樹形図は以下。各情報集合は 1 点の意思決定点からなる。Nature には利得がないことに注意。



(b) 最後の手番で実質上意味があるのは問い 1 タイプの男 2s だけである。ここでは 10 と -1 を比較して、 Eat を選ぶのが最適である。

男 1 の手番に戻る。(Nature は単に確率的に選択して「ゲームの展開」を決めるだけ。) Not を選べば（期待）利得は 0 であるが、 Buy を選ぶと期待利得は $10p + (1-p)(-3)$ である。したがって

$$10p + (1-p)(-3) \geqq 0$$

ならば男 1 は Buy を選ぶのが最適であり、後ろ向き帰納法の解の経路上で Buy を選ぶことになる。このような p の範囲は

$$1 \geqq p \geqq \frac{3}{13}$$