2014年度　ゲームの理論a 期末試験解答

1. (a) 行列表現は以下のようになる。まず合計が9にならないところを $(0,0,0)$ で埋めるとわかりやすい。負担額は申告金額であるから、うそをついて、かつ清掃が行われないかぎり利得は0になる。

A\B	2	3
4	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}$	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}$
5	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}$	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{1}$

C: 1

A\B	2	3
4	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}$	$\underline{1}, \underline{0}, \underline{0}$
5	$\underline{0}, \underline{1}, \underline{0}$	$0, 0, 0$

C: 2

純戦略のナッシュ均衡は、3市が真実を言う組み合わせ以外の全ての組み合わせである！

論理的に言うと：まず申告額の合計が9に満たない場合。
うそを言って小さい数値を申告しているプレイヤーを考える。このときの利得は0である。真実の数値に変えると清掃が行われるかもしれないが、負担額が申告額そのものなので利得は0で上がらず、清掃が行われないのであればやっぱり利得は上がらない。うそを言っていないプレイヤーは戦略を変えるとしても申告額を下げるしかないので、それでは清掃は行われないから利得も変わらない。
ゆえにこの形の戦略の組み合わせ（$(4, 2, 1)$, $(4, 3, 1)$, $(5, 2, 1)$, $(4, 2, 2)$）はナッシュ均衡である。

つぎに申告額の合計が9以上である場合。うそを言っているプレイヤーは1の利得を得ているので、もちろん申告を変える誘因はない。真実の便益を申告しているプレイヤーは、0を得ているが、もし小さい数値に変えると清掃が行われなくなるのであれば利得は上がらない。
唯一、利得が上がるのは、真実の便益を申告しているプレイヤーが小さい数値に変えても清掃が行われるケース、つまり申告額の合計が10以上のときである。このゲームではこれは $(5, 3, 2)$ の戦略の組み合わせのみであり、これ以外はナッシュ均衡であるということになる。

（注：指示があったにも関わらず、A市を行列プレイヤーにしているなど、勝手に行列表現を作っている人がけっこういた。採点しにくいので、問題の指示には従って欲しい。採点しにくい答案は採点ミスがおきやすいので、本人のためでもある。）

(b) 総額が9未満のケースは相変わらず $(0,0,0)$ の利得の組み合わせなのですぐにわかる。あとは負担額を気をつけて計算すればよい。

A\B	2	3
4	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}$	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}$
5	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}$	$-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \underline{\frac{1}{3}}$

C: 1

A\B	2	3
4	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}$	$\underline{\frac{1}{3}}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$
5	$-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$	$\underline{\frac{1}{3}}, \underline{\frac{1}{3}}, \underline{\frac{1}{3}}$

C: 2

今度は総額が9未満になる戦略の組み合わせ $(4,2,1)$, $(4,3,1)$, $(5,2,1)$, $(4,2,2)$ と、3市が正直に申告する $(5,3,2)$ がナッシュ均衡となる。
このルールだと、真実を申告する組み合わせ $(5,3,2)$ から一つの市が逸脱しても負担額は変わらないようになっているから、$(5,3,2)$ がナッシュ均衡になれたのである。

2. (a) 一つ作ればいいので、例えば両方のプレイヤーに共通の以下の戦略を考える。

１回目は Z、１回目に (Z, Z) を観察したら Y、そうでなかったら X をする。*

この戦略の組み合わせが部分ゲーム完全均衡であることを確かめる。まず２回目の最初から始まる部分ゲームを考える。どんな歴史の後でも、起こるのは (X, X) または (Y, Y) であり、これは G のナッシュ均衡である。

次にゲームの最初を考える。上の戦略に相手が従っているとき、こちらも従うと総利得は $6+3=9$ である。一回目に逸脱して Y をすると $7+1=8$、X をすると $0+1=1$ しかもらえない。他の混合戦略に逸脱したとしても、正の確率で 8 または 1 の総利得に行く経路に乗ることになるので、期待利得は 9 より低くなる。ゆえに上記の戦略を２人が行うことは部分ゲーム完全均衡である。

(b) グリム・トリガー戦略は：１回目と (Z, Z) だけが観察されてきた歴史の後は Z 、そうでなかったら Y というものである。

(問題にはこれは書いていないので、当然と思っても問題の要求通り、この戦略である、とまず書かなければならない。ここで部分点になっている。展開形ゲームの戦略を正確に書くということを要求しているのである。以下の $\delta \geqq 1/4$ だけ答えても半分の点にしかならない。）

上記の戦略を２人がおこなっている組み合わせが部分ゲーム完全均衡になるには、「そうでない」歴史の後から始まる任意の部分ゲームと、１回目または (Z, Z) のみが観察されてきた歴史の後から始まる任意の部分ゲームについて分ける。

前者については段階ゲームのナッシュ均衡である (Y, Y) が続くので、それらの部分ゲームのナッシュ均衡ともなっている。

後者については、相手が上記のグリム・トリガー戦略に従っているとして、one-step deviation がグリム・トリガー戦略より高い利得を与えなければよい。

まず１回目について考える。自分もグリム・トリガー戦略に従うと、割引総和は $6/(1-\delta)$ である。one-step deviation としては Y を確率１で取ることをまず考える。今期は 7 を得るが、来期以降は (Y, Y) がずっと続くので 3 をずっともらうことになり、

$$\frac{6}{1-\delta} \geqq 7+\delta\frac{3}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{1}{4}$$

ならばこの one-step deviation は高い利得を与えない。

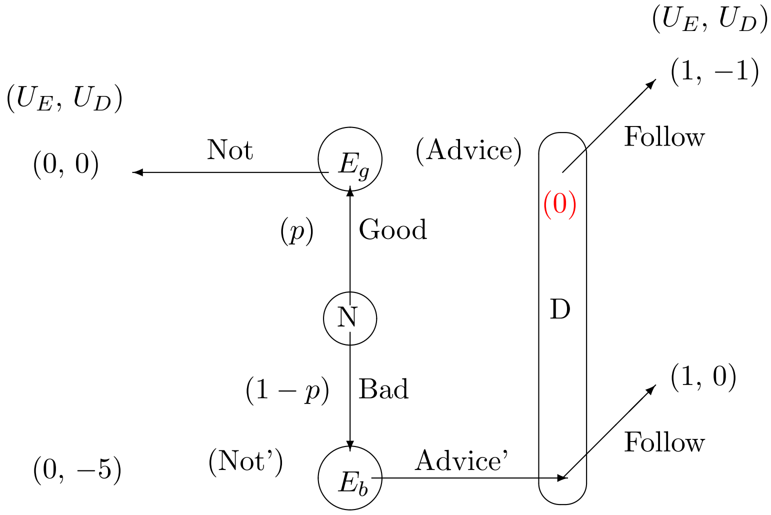
この他には Z と Y の混合行動に逸脱するということが考えられるが、正の確率で $7+\delta\frac{3}{1-\delta}$ の経路に、残りの確率で $6/(1-\delta)$ の経路に行くので、上記の不等号が満たされていればこのような one-step deviation もグリム・トリガー戦略より高い利得を与えない。

最後に、初回でなく、(Z, Z) だけが観察されてきた任意の歴史の後から始まる部分ゲームを考える。これまでの歴史における利得は既に固定されているので、この部分ゲームの始まる期をあたかも初回だと思って計算すればよい。これも上の不等式さえ満たされれば、任意の one-step deviation がグリム・トリガー戦略より高い利得を与えないことになる。

* １回目に (Z, Z) 以外を観察したときについては、逸脱したとするなら Y だから Y が入った歴史を観察したら X、としておけば他の歴史の後は両者が同じ (X, X) あるいは (Y,Y) をするように作ってあればよい。

3. うまく樹形図を描いて考えるとよい。

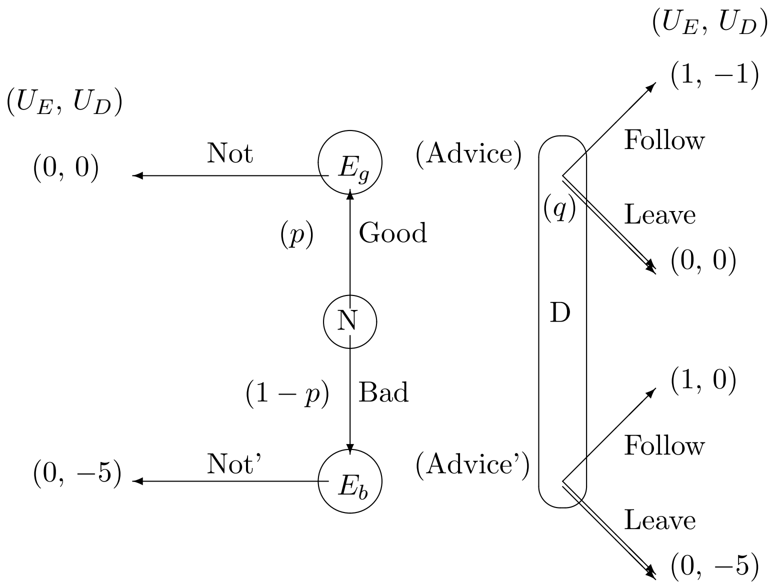
(a) ならない（どんな p についても）。E の分離戦略 (Not, Advice') に対して、D の事後的信念は $q=0$ であり、最適反応は advice をうけたら従う Follow である。以下の図参照。



するとこれに対して、Good タイプの E は Not でなく Advice を選んだ方が利得が 0 から 1 に高まるので、(Not, Advice') は最適反応ではない。

(b) まず (Not, Not') という一括戦略を考える。D の情報集合は経路外なので、任意の q を考えることができる。つまりこの場合は p は関係ない。

Leave が Follow より低くない利得を与えれば、どちらのタイプの E も Advice に変えても利得が上がらないので、完全ベイジアン均衡になる。以下の図参照。



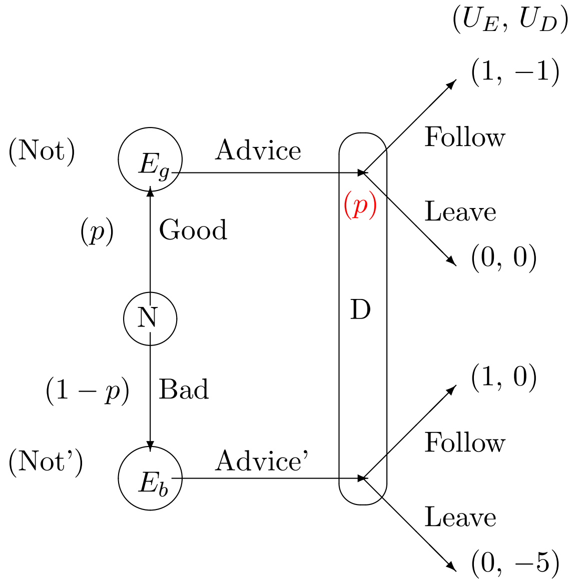
これは、

$$Eu_D(L,q) = (1-q)(-5) \geqq Eu_D(F,q) = q(-1) \iff q \geqq \frac{5}{6}.$$

のとき成立する。ゆえに (Not, Not') を含む純戦略による一括均衡は、q が無限個あるので均衡も無限個あり、その集合は

$\{((\text{Not, Not'}), \text{Leave}, q) | \quad q \geqq \frac{5}{6}\}$ である。
（注：このゲームでは後手には情報集合が一つしかないので、その純戦略は単に Leave と書かれるべきである。）

次に、(Advice, Advice') という一括戦略を考える。これは実は D が何をしようと Not (Not') より低くない利得を与えるので、E は逸脱する誘因がない。しかし、整合性より均衡においては $q = p$ でなくてはならないから事前確率の p に応じて D の最適反応が決まり、p の範囲で分類することが必要となる。



上記の計算と同様にして、

$$Eu_D(L, p) = (1-p)(-5) \geqq Eu_D(F, p) = p(-1) \iff p \geqq \frac{5}{6}$$

であるから、p が 5/6 以上のときは Leave が最適反応、5/6 以下のときは Follow が最適反応である。まとめると (Advice, Advice') を含む純戦略による一括均衡は p に応じて（ほぼ）一つずつ あり、

$p \geqq \frac{5}{6}$ のときは ((Advice, Advice'), Leave, $q = p$) が完全ベイジアン均衡となり、
$p \leqq \frac{5}{6}$ のときは、((Advice, Advice'), Follow, $q = p$) が完全ベイジアン均衡である。

(c) もし、両者が状態を知っていれば、そもそもアドバイスがいらない。あるいは、Bad のときに必要な修理が依頼される（部分ゲーム完全）均衡が存在する。これに対し、不完備情報のときは、不必要な修理まで行われるか、あるいは必要な修理が行われないという非効率的な帰結が均衡においても必ず起こる。
(完備情報になったからといって、同時ゲームになるとか、そこまで話を変更しないで欲しい。)