2014年度　ゲームの理論a 期末試験 (70分)

グレーヴァ香子

- 以下の全ての問題に答えなさい。解答は問題順でなくてもいいが、どの問題に答えているのかを明確にして書きなさい。
- 部分点があるので、導出の過程を <u>必ず</u> 書きなさい。

1. ある県の川は3つの市、A市、B市、C市にまたがって流れている。この川の清掃費用は9 (単位1000万円) であり、これを県としては3つの市に分担させたいが、各市が川の清掃から得る便益も考慮してやりたい。しかし、県は各市の正確な便益を知らない。そこで、各市にそれを同時に申告させて、負担額を決めることにした。

   真実は、A市の便益は5 (000万円)、B市の便益は3、C市の便益は2である。これは各市は知っている。また、簡単化のため、A市は4または5のみを申告する（これらが純戦略)、B市は2または3のみを申告し、C市は1または2のみを申告するとし、この戦略の集合は3市は共有知識として知っているとする。各市の利得は、清掃が行われない場合は0、行われた場合、便益から負担額を引いたものとする。

   (a) 3市の申告額の合計が9以上であれば清掃を行い、そのときの各市の負担額は自分が申告した額とするルールを考える。このときのA（行プレイヤー)、B（列プレイヤー)、C（行列を選ぶプレイヤー）の3人同時ゲームの行列表現を書き、純戦略のナッシュ均衡を全て求めなさい。利得は第1項をA市、第2項をB市、第3項をC市としなさい。

   （行列表現が書けなかったら、なんらかの議論でナッシュ均衡を求めれば部分点を与える。)

   (b) 県はもう一つルールを考えた。3市の申告額の合計が9以上であれば清掃を行うのだが、そのときの負担額は、$\frac{2}{3}$という基本負担額 (申告合計額が9に満たない場合はこれも徴収しない) に、9から<u>他の2市の申告額の合計</u>を引いたもの追加するというものである。例えば3市の申告額がA市から順に5, 2, 2　だったとすると、清掃が行われ、A市の負担額は$\frac{2}{3}+(9-2-2)=5+\frac{2}{3}$となるから、利得は$5-(5+\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}$となる。B市（うそをついている）の負担額は$\frac{2}{3}+(9-5-2)=2+\frac{2}{3}$であるから利得は$3-(2+\frac{2}{3})=\frac{1}{3}$、C市の負担額も$\frac{2}{3}+(9-5-2)=2+\frac{2}{3}$であるが、利得は$2-(2+\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}$である。

   (a) と同様にして3人同時ゲームの行列表現を書き、純戦略のナッシュ均衡を全て求めなさい。

2. 以下の2人同時ゲームGを考える。プレイヤーは1と2である。

1\ 2	X	Y	Z
X	1, 1	2, 0	0, 0
Y	0, 2	3, 3	7, 0
Z	0, 0	0, 7	6, 6

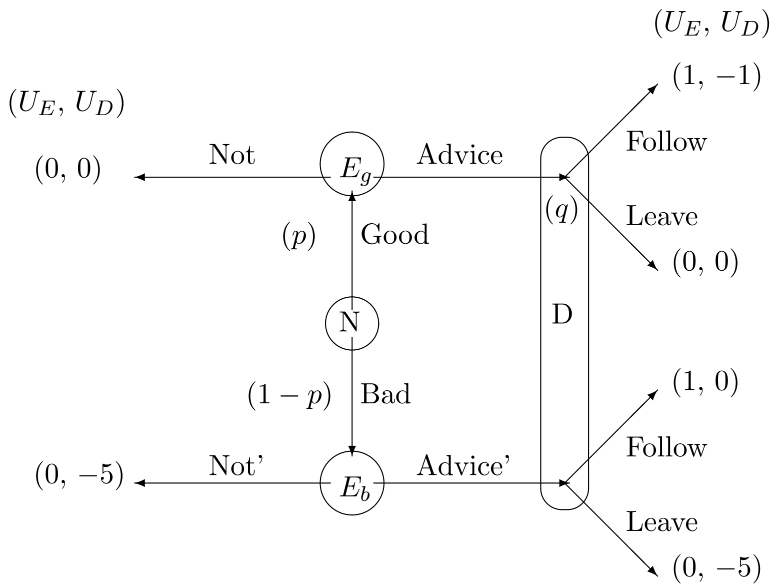
   (a) このゲームを完全モニタリングで2回繰り返すゲームを考える。利得は2回のGからの利得を足したものとする。1回目に (Z, Z) が行われるような部分ゲーム完全均衡はあるか？あれば具体的に戦略の組み合わせを作り、その戦略の組み合わせが部分ゲーム完全均衡であることを証明しなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。

   (b) Xという行動が不可能になり、毎回YまたはZを選ぶ2×2ゲームになったとする。（利得表は上記の行列表現から1行目と1列目を削除して考える。）これを完全モニタリングで無限回繰り返すゲームにし、利得は$\delta\in(0,1)$という割引因子を用いた割引総和とする。毎回 (Z, Z) が行われるようなグリム・トリガー戦略の組み合わせを作り、それが部分ゲーム完全均衡になるためのδの範囲を求めなさい。（どうしてその範囲でいいのか、理由も答えること。)

（裏面に続く）

3. 自動車修理業者 E と、ちょっと自家用車の様子に不安を覚えて立ち寄ったドライバー D とのゲームを考える。D の車のエンジンに問題が起きているかどうかは修理業者にしかわからない。ドライバー D の予想は $p \in (0,1)$ の確率でエンジンは良好 (Good) であるが、$(1-p)$ の確率で問題がある (Bad) である。これは E も知っているとする。この状況を以下の展開形ゲームとして考える。（正確には以下の展開形ゲームは共有知識とする。）

まず、自然が Good か Bad かを (p) と $(1-p)$ の確率で選び、修理業者 E に知らせる。状態を知った後、E は修理を勧める (Advice) か勧めないか (Not) を選ぶ。Not を選んだらゲームはそこで終わり、ドライバーは立ち去る。ドライバー D は状態はわからないが、業者の行動が Advice であったら、それに従って修理を依頼する (Follow) か、依頼せず立ち去る (Leave) かを選んでゲームが終わる。どちらの状態であっても、修理を依頼されると業者の利得は 1、立ち去られると業者の利得は 0 である。ドライバーの利得は、状態が Good のときに修理すると -1、Bad のときに修理しないと -5、その他の場合は 0 とする。



(a) Good のときは E は修理を勧めず、Bad のときだけ修理を勧めるという分離戦略は完全ベイジアン均衡の一部になるか。なれば具体的に戦略の組み合わせを書き、それが完全ベイジアン均衡であることを示しなさい。ならなければ、どうしてならないのかを論理的に説明しなさい。

(b) 純戦略による一括均衡があるか。あれば具体的に（全て）作って、それ（ら）が完全ベイジアン均衡であることを証明しなさい。p に条件がついてもよいが、それも書くこと。なければ、どうしてないのかを論理的に説明しなさい。

(c) 自然の選択の後、E と D の両方がエンジンの状態を知るのであれば（つまり完備情報であれば）どうなっていたかを考え、上記の分析を踏まえて経済学的な意味を論じなさい。