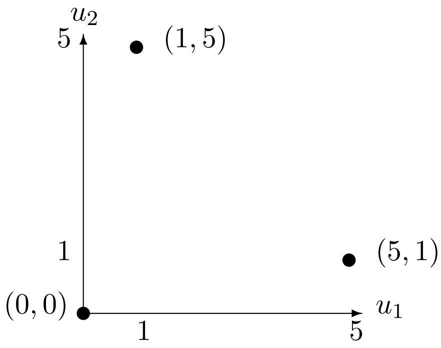
2014年度　ゲームの理論a 演習第3回解答

グレーヴァ香子

1. (a) 以下のような3つの点になる。



(b) この行動計画によると $(5,1)$ という利得ベクトルが $1/2$ の確率で得られ、$(1,5)$ という利得ベクトルが $1/2$ の確率で得られる。したがって、二人の期待利得の組み合わせは

$$\frac{1}{2}(5,1)+\frac{1}{2}(1,5)=(3,3).$$

（もちろん各プレイヤーの期待利得をばらばらに計算してもよい。）

(c) 解が $[0,1]$ の範囲で存在しないことを証明する方法はいろいろあると思うが、例えば、$5pq+(1-p)(1-q)=3$ を q について解いて $q=\frac{2+p}{6p-1}$ とする。これを $pq+5(1-p)(1-q)=3$ に代入すると

$$6p\cdot\frac{2+p}{6p-1}+5-5p-5\cdot\frac{2+p}{6p-1}-3=0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{12}{6p-1}\Big\{-2p^2+2p-1\Big\}=0.$$

大括弧内が0になるような p が $[0,1]\setminus\{\frac{1}{6}\}$ の範囲にあるかを考える。[2]
$-2p^2+2p-1$ は p の2次の係数が負なので上に凸な関数で、最大値は $p=\frac{1}{2}$ のときに与えられる。($-2p^2+2p-1$ を p で微分して0とおく。)
しかし $-2(\frac{1}{2})^2+2\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ だから、$[0,1]\setminus\{\frac{1}{6}\}$ の範囲では大括弧内はずっと負であり、0になることはない。つまり、所望の p が存在しないことが証明された。(判別式 <0 でもよい。)

おまけ：このゲームを無限回繰り返す場合には、特に毎期相関戦略を用いずとも、奇数期には (U,L) を、偶数期には (D,R) を行うということができれば、δ が1に非常に近いと、（ほぼ）$(3,3)$ を平均利得ベクトルとして達成できる。
例えばプレイヤー1の平均利得は

$$(1-\delta)(5+\delta\cdot 1+\delta^2\cdot 5+\delta^3\cdot 1+\cdots)=(1-\delta)\Big(\frac{5}{1-\delta^2}+\frac{\delta}{1-\delta^2}\Big)=\frac{5+\delta}{1+\delta}.$$

ゆえに $\delta\to 1$ のときこれは3となる。プレイヤー2も同様だし、奇数期と偶数期を入れ替えても同じ。

(a) 毎期、確率 $4/6=2/3$ で (C,c)、確率 $1/3$ で (D,c) が行われるので、プレイヤー1の各期の期待利得は $\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 6=4$、プレイヤー2の各期の期待利得は $\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 0=2$ で、これはずっと同じである。したがって平均利得も

$$(1-\delta)(4+\delta\cdot 4+\delta^2 4+\cdots)=4$$
$$(1-\delta)(2+\delta\cdot 2+\delta^2 2+\cdots)=2$$

となる。

[2] 集合 X から集合 Y の要素を取り除いたものを $X\setminus Y$ と書く。

(b) サイコロの目が１－４なので、今期はプレイヤー１は 3 をもらえる。来期以降は毎期期待利得として 4 をもらうので、割引和は

$$3+\delta\cdot 4+\delta^2\cdot 4+\cdots=3+\frac{4\delta}{1-\delta}.$$

(c) D に逸脱すると今期は 6 をもらえるが、来期以降は２人とも処罰フェーズに従うので毎期 1 をもらうので、割引和は

$$6+\delta\cdot 1+\delta^2 1+\cdots=6+\frac{\delta}{1-\delta}.$$

(b) より大きくないためには

$$3+\frac{4\delta}{1-\delta}\geqq 6+\frac{\delta}{1-\delta}\iff\delta\geqq\frac{1}{2}.$$

(d) サイコロの目が５または６なので、当初の戦略に従うとすると今期プレイヤー２は 0 をもらい、来期以降は毎期期待利得として 2 をもらう。従って割引和は

$$0+\delta\cdot 2+\delta^2\cdot 2+\cdots=\frac{2\delta}{1-\delta}.$$

プレイヤー２が逸脱して d をすると、今期は 1 をもらい、今後は２人とも処罰フェーズに従うので毎期 1 をもらうことになる。ゆえに割引和は

$$1+\delta\cdot 1+\delta^2\cdot 1+\cdots=\frac{1}{1-\delta}.$$

したがって当初の戦略に従う方が悪くないための δ の範囲は

$$\frac{2\delta}{1-\delta}\geqq\frac{1}{1-\delta}\iff\delta\geqq\frac{1}{2}.$$

おまけ：全ての history の後の、全ての（one-step の）逸脱を阻止することで部分ゲーム完全均衡にすることができる。
あとは、サイコロの目が１から４の場合のプレイヤー２の逸脱を阻止すればよい（サイコロの目が５または６のとき、プレイヤー１は逸脱しない）。
サイコロの目が１－４のとき、プレイヤー１が当初の戦略に従って C をするとして、プレイヤー２も従って c をすると、今期 3 をもらい、今後は毎期 2 を期待利得としてもらう。割引総和は

$$3+\delta 2+\delta^2 2+\cdots=3+\frac{2\delta}{1-\delta}.$$

d に一期だけ逸脱して、その後は当初の戦略に従う（つまり (D,d) をずっと行う）ときの割引総和は

$$6+\delta\cdot 1+\delta^2\cdot 1+\cdots=6+\frac{\delta}{1-\delta}.$$

ゆえに、逸脱しない条件は

$$3+\frac{2\delta}{1-\delta}\geqq 6+\frac{\delta}{1-\delta}\iff\delta\geqq\frac{3}{4}.$$

これまでの条件と合わせて、

$$\delta\geqq\frac{3}{4}$$

であれば全ての場合で one-step の逸脱が起こらないので、この戦略の組み合わせは部分ゲーム完全均衡になり、(4,2) が平均利得として達成できる。