

2014年度 ゲームの理論 a 演習第3回 (自宅学習用)

グレーヴァ香子

- 学部生の方は提出しなくていいです。
 - 院生の方はレポートとして6/27の講義の時に提出して下さい。採点して多少成績に加味します。
1. プレイヤー全員が共通に観察できる確率的事象発生装置があるとすると、それを利用して、各プレイヤーが独立に混合戦略を行うことによって実現可能な期待利得ベクトル（全員の期待利得の組み合わせ）より広い範囲の期待利得ベクトルを実現することが可能な場合があることを確認する。
以下の双行列表現で表される 2×2 同時ゲームを考える。

1 \ 2	L	R
U	5, 1	0, 0
D	0, 0	1, 5

- (a) 横軸をプレイヤー1の利得、縦軸をプレイヤー2の利得として、2人の 純戦略の組み合わせ によって可能な利得ベクトルを全て図示しなさい。（ヒント：点になる。）
- (b) 2人が共通に観察できるサイコロがあるとすると、これを利用して以下の行動計画（相関戦略、correlated strategy と呼ばれる）を考える。
プレイヤー1：偶数ならU、奇数ならDをする。
プレイヤー2：偶数ならL、奇数ならRをする。
偶数が出る確率を $1/2$ として、この相関戦略の組み合わせによる2人の期待利得の組み合わせを求めなさい。
- (c) (b) で求めた期待利得の組み合わせを $(Eu_1, Eu_2) = (x, y)$ とする。2人が独立に混合戦略 $pU + (1-p)D$ と $qL + (1-q)R$ を行うことを考える。もし、混合戦略によって (x, y) という期待利得の組み合わせが実現可能であるならば以下の連立方程式に解 (p^*, q^*) がそれぞれ $[0, 1]$ の範囲で存在することになる。しかしそのような解は存在しないことを示しなさい。

$$\begin{cases} 5pq + (1-p)(1-q) = x \\ pq + 5(1-p)(1-q) = y \end{cases}$$

2. 相関戦略を使って、以下の段階ゲーム G を無限回繰り返すときに平均利得ベクトルとして $(4, 2)$ を達成することを考える。具体的には、每期サイコロを振って、出た目が1から4のときは (C, c) を行い、5か6のときは (D, c) を行うとする。（これを「協力フェーズ」と呼ぶことにする。ゲームの最初も協力フェーズとする。）サイコロの目も、お互いの行動も観察可能であるとする。もし誰かがこれに従わなかったときは次の期以降ずっと (D, d) を行うとする。（これを「処罰フェーズ」と呼ぶことにする。）
2人は共通の割引因子 $\delta \in (0, 1)$ を用いて、割引総利得を最大にするように行動するとする。

1 \ 2	c	d
C	3, 3	0, 6
D	6, 0	1, 1

- (a) 協力フェーズが無限回続いたときの両プレイヤーの平均期待利得がそれぞれ4と2であることを確認しなさい。（ゲームが始まる直前であり、第1期目のサイコロの結果も知られていない時点で考える。）

(続く)

協力フェーズにおいてプレイヤー1の one-step deviation を考える。(処罰フェーズでは逸脱は起きない。) わかりやすくするため、第1期のみを考え、サイコロの結果がわかった時点から始める。

- (b) 第1期にサイコロの目が1、2、3、4のどれかだった場合を考える。このとき、2人が上記の戦略に従っていた場合のプレイヤー1の期待利得の割引和を求めなさい。
- (c) 引き続きサイコロの目が1、2、3、4のどれかだった場合を考える。プレイヤー2がcをするとして、プレイヤー1が逸脱してDを行い、その後は2人とも上記の戦略に従う(すなわち(D,d)をずっと行う)とする。このときのプレイヤー1の期待利得の割引和を求め、(b)でもとめた値より大きくない(すなわち one-step deviation が総利得を厳密には高めない) ための δ の範囲を求めなさい。
- (d) サイコロの目が5または6の場合、2人が上記の戦略に従っていたときのプレイヤー2の期待利得の割引和と、プレイヤー2が逸脱してdを行い、その後は2人とも上記の戦略に従うときのプレイヤー2の期待利得の割引和をそれぞれ求め、上記の戦略に従うときの利得が one-step で逸脱したときの利得より小さくない δ の範囲を求めなさい。