2014年度　ゲームの理論a 授業内演習第2回解答

グレーヴァ香子

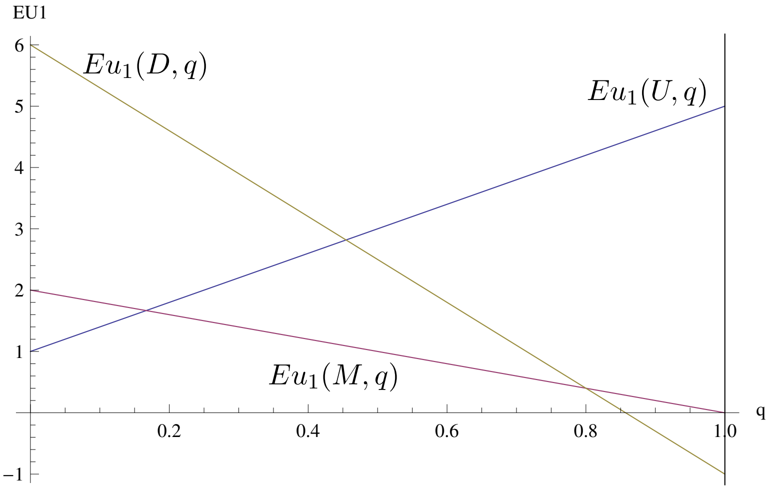
1. (a) 最適反応に下線をしたものは以下。ゆえに、純戦略のナッシュ均衡は存在しない。

1 \ 2	L	R
U	$\underline{5}$, 1	1, $\underline{2}$
M	0, 1	2, $\underline{2}$
D	−1, $\underline{2}$	$\underline{6}$, 1

(b) 式は

$$\begin{aligned} Eu_1(U,q) &= 5q + (1-q) = 1 + 4q \\ Eu_1(M,q) &= 2(1-q) = 2 - 2q \\ Eu_1(D,q) &= -q + 6(1-q) = 6 - 7q \end{aligned}$$

ゆえにグラフは以下の様になる。



(c) グラフからもわかるが、$Eu_1(D,q) = Eu_1(U,q)$ となる q をまず求めると、

$$1 + 4q = 6 - 7q \Rightarrow q^* = \frac{5}{11}$$

となる。つまり、$q < 5/11$ のときは $Eu_1(D,q) > Eu_1(U,q)$ であるから、大きい方の $Eu_1(D,q)$ と $Eu_1(M,q)$ を比べてみる。

$$Eu_1(D,q) - Eu_1(M,q) = 6 - 7q - (2-2q) = 4 - 5q > 4 - 5 \times \frac{5}{11} = \frac{44-25}{11} > 0.$$

ゆえにこのケースでは M は最適反応にならない。
同様に、$q > \frac{5}{11}$ のときは $Eu_1(D,q) < Eu_1(U,q)$ であるから $Eu_1(U,q)$ と $Eu_1(M,q)$ を比べ、

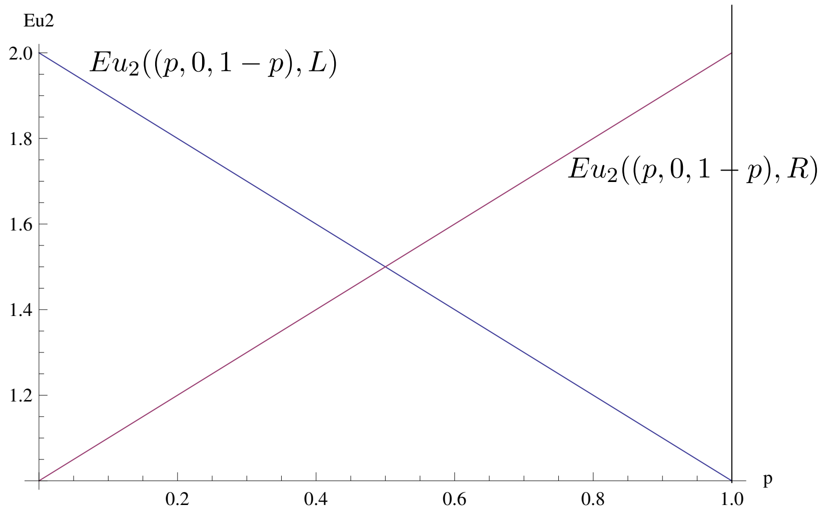
$$Eu_1(U,q) - Eu_1(M,q) = 1 + 4q - (2-2q) = -1 + 6q > -1 + 6 \times \frac{5}{11} = \frac{-11+30}{11} > 0.$$

ゆえにこのケースでも M は最適反応にならない。
ちょうど $q = \frac{5}{11}$ のときは U, D およびこの二つを任意の確率で混合した戦略はすべて等しい期待利得 $\frac{31}{11}$ を与える。このとき、M の期待利得は $2 - 2\frac{5}{11} = \frac{22-10}{11} = \frac{12}{11}$ であるから、このケースでも M は最適反応にはならない。(このケースは、上の2つのケースのどちらかを等号付きの不等号にして含めてしまってもかまわない。)
以上で任意の q について M が最適反応でないことが示された。

(d) 式は

$$Eu_2((p,0,1-p),L) = p + 2(1-p) = 2 - p$$
$$Eu_2((p,0,1-p),R) = 2p + (1-p) = 1 + p$$

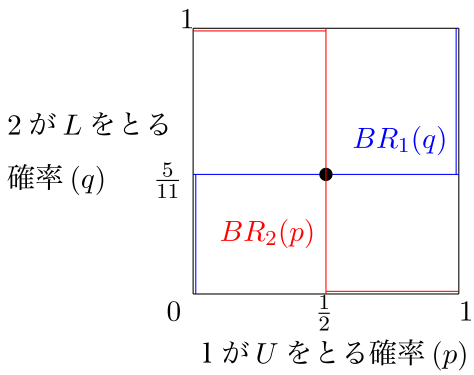
したがってグラフは以下のようになる。



(e) まとめると、最適反応は

$$BR_1(q) = \begin{cases} \{D\} & \text{if } q < \frac{5}{11} \\ \Delta\{D,U\} & \text{if } q = \frac{5}{11} \\ \{U\} & \text{if } q > \frac{5}{11} \end{cases}$$

$$BR_2(p) = \begin{cases} \{L\} & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ \Delta\{L,R\} & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ \{R\} & \text{if } q > \frac{1}{2} \end{cases}$$

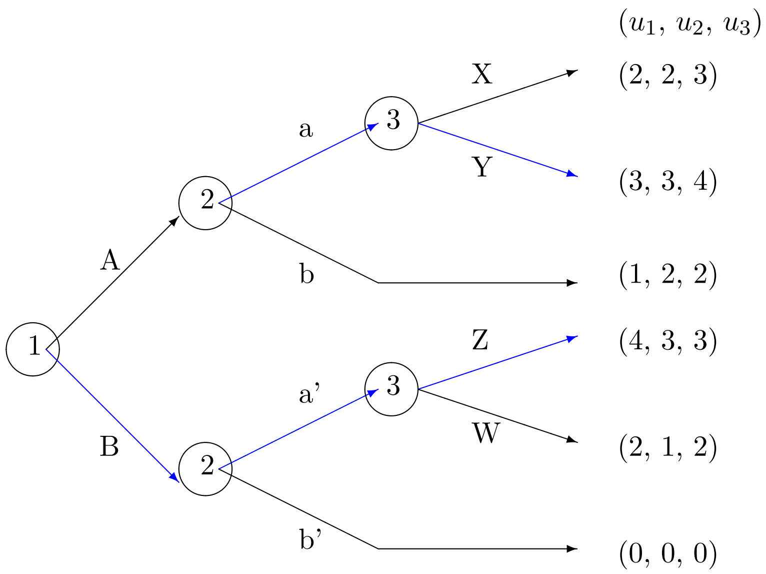


ゆえにただ一つの混合戦略のナッシュ均衡が存在し、((U の確率、M の確率、D の確率), (L の確率、R の確率)) の順で書くと、$((\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{5}{11}, \frac{6}{11}))$ である。

2. 最後のプレイヤーは 3 である。上の情報集合では 3 は Y を選び、下の情報集合では Z を選ぶのが最適である。

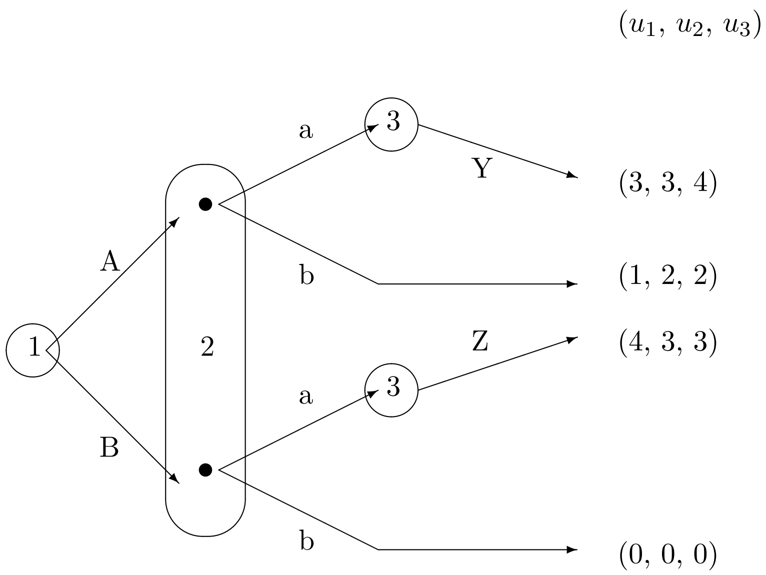
   一つもどるとプレイヤー 2 が意思決定する。上の情報集合では、a を選ぶとプレイヤー 2 の利得は 3、b を選ぶと 2 であるから、プレイヤー 2 は a を選ぶ。下の情報集合では a ’ を選ぶと 2 の利得は 3 、b’ を選ぶと 0 であるから a’ を選ぶ。

   最初に戻って、プレイヤー 1 は、A を選ぶと利得は 3 、B を選ぶと利得は 4 であるから B を選ぶ。以上をまとめて、後ろ向きの帰納法の解はプレイヤー 1 の戦略、2 の戦略（上の情報集合から）、3 の戦略（上の情報集合から）の順に書くと (B, aa’, YZ) のみである。(以下の図参照。)



3. プレイヤー 3 の各情報集合から始まる部分ゲームにおいては一人ゲームであるから、2 と同様に Y, Z がそれぞれの部分ゲームに制限されたところの「均衡」となる。

   これを踏まえてゲームを縮小すると以下のようになる。



   他に真部分ゲームはないので、プレイヤー 1 と 2 の同時ゲームを解くことになる。これは以下のような行列表現ができる（プレイヤー 3 の利得は捨象してある)。

1\ 2	a	b
A	3, $\underline{3}$	$\underline{1}$, 2
B	$\underline{4}$, $\underline{3}$	0, 0

   ゆえに、純戦略の部分ゲーム完全均衡はただ一つあり、(B, a, YZ) である。(プレイヤー 2 の戦略は情報集合が一つなので、一つの行動になっていることに注意。)