2013年度　ゲームの理論a 期末試験解答

グレーヴァ香子

1. まずプレイヤー3の一人ゲームとなる最後の部分ゲームから解くと、Bが最適である。これを踏まえてプレイヤー1の2つ目の情報集合（ただ一つの意思決定点からなる）から始まる部分ゲームを考えると、これはプレイヤー1と2の2人同時ゲームであり、2つのナッシュ均衡 (U,L) と (D,R) がある。

   (U,L) を含む部分ゲーム完全均衡を考える。これを踏まえてプレイヤー1の最初の情報集合に戻ると In が最適であるので、まとめて ((In, U), L, B) というのが一つの部分ゲーム完全均衡である。

   (D,R) を含むものを考える。するとプレイヤー1の最初の情報集合では Out が最適であるので、((Out, D), R, B) も部分ゲーム完全均衡である。

   注意1：おそらく講義に出ていない人と思われるが、経路 Out 、や利得の組み合わせを均衡だとして書いていた答案が多少あった。非協力ゲーム理論における均衡は「戦略の組み合わせ」であることをしっかり理解せよ。

   注意2：たまに、「プレイヤー1は In の後に U をすると3を得られ、In の後に D をすると1しか得られないので、 ((In, U), L, B) だけが均衡である」という議論が見られた。これはそれなりに意義のある議論なのであるが（forward induction という考え方である）、部分ゲーム完全均衡にはこのような考え方はないのである。機械的に、各部分ゲームのナッシュ均衡を組み合わせていかないとならない。

2. (a) 部分ゲーム完全均衡はただ一つあって (NI, NR)。

   (b) 誘導標準形の行列表現は以下。

C\ E	Return	NR
Invest	12, 2	0, 10
NI	10, 0	10, 0

   (c) E が Return をする確率を q として、C の最適反応対応を求める。

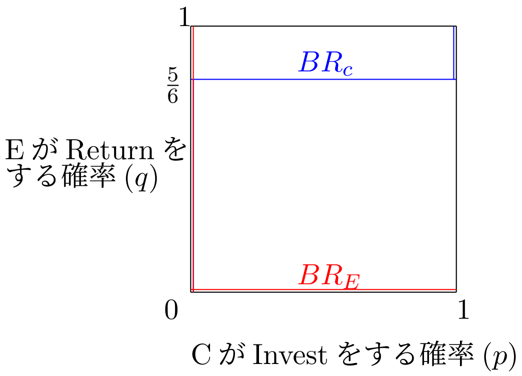
$$Eu_c(\text{Invest}, q) = 12q$$
$$Eu_c(\text{NI}, q) = 10$$

より $Eu_c(\text{Invest}, q) \geqq Eu_c(\text{NI}, q) \iff q \geqq \frac{5}{6}$、あるいは

$$BR_c(q) = \begin{cases} \{\text{Invest}\} & \text{if } q > \frac{5}{6} \\ \Delta\{\text{Invest},\ \text{NI}\} & \text{if } q = \frac{5}{6} \\ \{\text{NI}\} & \text{if } q < \frac{5}{6} \end{cases}$$

同様にして、C が Invest をする確率を p として E の最適反応対応を求めると

$$BR_E(p) = \begin{cases} \{\text{NR}\} & \text{if } p > 0 \\ \Delta\{\text{Return},\ \text{NR}\} & \text{if } p = 0 \end{cases}$$



ゆえに、混合戦略の範囲での誘導標準形のナッシュ均衡の集合は

$$\{(\text{NI}, q\ \text{Return} + (1-q)\text{NR}) \mid 0 \leqq q \leqq \frac{5}{6}\ \}.$$

（この中には (NI, NR) という純戦略の組み合わせも含まれている。）

(d) ナッシュ均衡とはゲームが始まる前のお互いの利得最大化を考えるものであるのに対し、部分ゲーム完全均衡ではゲームの最中の最大化も考えるというのが違いの原因である。

C が NI を選ぶ場合、E の情報集合から始まる部分は「経路外」なので、任意の混合戦略は同じ利得を事前には与える。したがって、NI を最適反応にする範囲で E が何をしてもよいので (c) のような大きな集合になる。

これに対し、部分ゲーム完全均衡では、E の情報集合から始まる部分ゲームにおいても利得が最大になるような行動、すなわち NR だけが安定であると考える。そのために均衡集合の違いが出てくる。

（E のナッシュ均衡戦略はすべてが「空脅し」ではない。$q = 0$ の NR という均衡戦略は部分ゲーム完全均衡にもなっている。「経路外」という用語があるとベスト。）

(e) Consumer のグリム・トリガー戦略としては、history が $\emptyset$（第１期）または (Invest, Return)^t という形のときは Invest、そうでないときは NI　というものを考える。

Entrepreneur のグリム・トリガー戦略は、正確には観察する history が Consumer のものとちょっとちがっていて、(Invest)（第１期）または ((Invest, Return)^t, Invest) という形のときは Return、そうでないときは NR というものを考える。（ここの部分はほぼ誰もできていなかった。「history（歴史、履歴）」の概念に注意。２回繰り返し程度の樹形図でも書いてみたら Entrepreneur が見るものは Consumer が見るものと異なることがわかるはず。）

二人がこのグリム・トリガー戦略に従っているときの割引総利得は

$$U_c = \frac{12}{1-\delta}, \quad U_E = \frac{2}{1-\delta}$$

である。

Consumer ：history が $\emptyset$（第１期）または (Invest, Return)^t という形のときの one-step deviation を考える。

NI に逸脱すると、その期は 10、またその後両者がグリム・トリガー戦略に従うとするので、ずっと (NI, NR) が続くことになり、ずっと 10 を得る。したがってこのような one-step deviation は $10/(1-\delta) < 12/(1-\delta)$ しかもらえない。

p NI + $(1-p)$ Invest (かつ $p > 0$) に１回だけ逸脱すると、上記の分析から $p\frac{10}{1-\delta} + (1-p)\frac{12}{1-\delta}$ が割引総利得となり、これも $\frac{12}{1-\delta}$ より少ない。

次に history が (Invest, Return)^t という形でないとき（２期以降）を考える。たとえ Invest をしても、E は NR しかしてこないので、NI をずっと行うことは任意の δ について最適である。

以上から Consumer にとってグリム・トリガー戦略は最適である。

Entrepreneur：history が (Invest)（第１期）または ((Invest, Return)^t, Invest) という形のときを考える。今期だけ NR に逸脱し、来期からはグリム・トリガー戦略に従うとすると、今期は 10、来期以降は 0 をもらうことになる。したがって

$$\frac{2}{1-\delta} \geqq 10 \iff \delta \geqq \frac{4}{5}$$

ならばこの形の逸脱よりグリム・トリガー戦略に従った方がよい。Consumer の時と同様に、NR に 1 より小さい正の確率で逸脱したとしても上の条件が成立していれば、利得はグリム・トリガー戦略より高くならない。

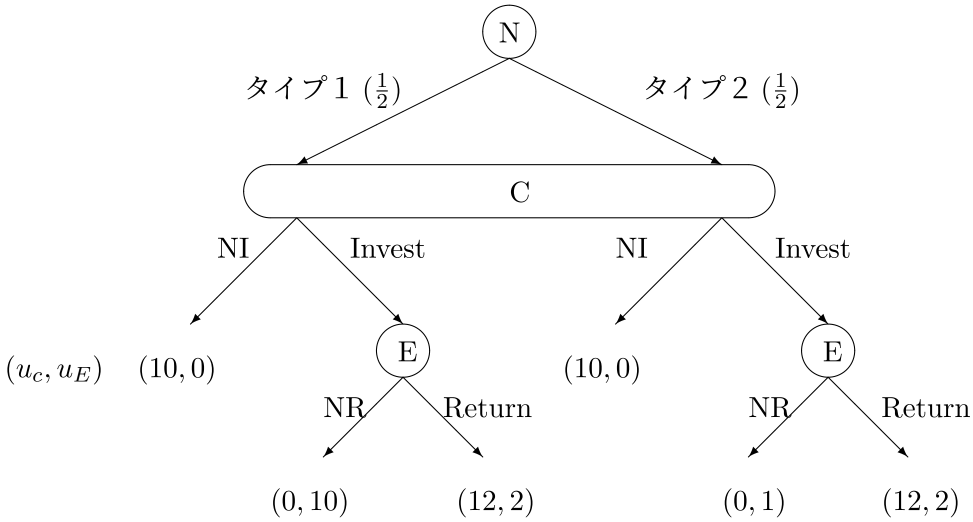
最後に、history が (Invest)（第１期）または ((Invest, Return)^t, Invest) という形でないときは、C が NI しかしてこないので、毎回 NR をすることは最適である。

まとめると、上のグリム・トリガー戦略が部分ゲーム完全均衡になる δ の範囲は

$$\delta \geqq \frac{4}{5} = 0.8$$

である。

3. (a) 樹形図は以下のような形（もちろん横に広がる形でもよい）。



(b) Consumer は二つの意思決定点について 1/2 ずつの Belief を持つことになる。E は各情報集合においてそこに来れば、確実に知っている。E の各情報集合においては、完全ベイジアン均衡は逐次合理性だけを要求することになるので、左の情報集合（タイプ1のとき）では NR を、右の情報集合（タイプ2のとき）では Return を選ぶのが最適である。

これを踏まえると各純戦略 Invest, NI の期待利得は

$$Eu_c(\text{Invest}, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\text{NR},\ \text{Return})) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$
$$Eu_c(\text{NI}, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\text{NR},\ \text{Return})) = 10$$

ゆえに完全ベイジアン均衡はただ一つあって (NI, (NR, Return), $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) というものである。