2013年度　ゲームの理論 a 演習第 4 回解答

グレーヴァ香子

1. 部分ゲーム完全均衡ではない。s_1^* に対して s_2^* よりも高い利得を与える戦略、あるいは s_2^* に対して s_1^* よりも高い利得を与える戦略があることを示せばよい。２回目の部分ゲームはナッシュ均衡になっているので、１回目で考えるべきだということもわかる。

   例えば、１回目にプレイヤー１が B をする $s_1 = (B, A, B, B, B)$ を考えると $U_1(s_1, s_2^*) = u_1(B, a) + u_1(B, b) = 1 + 5$ であるが、$U_1(s_1^*, s_2^*) = 2 + 2$ であるから s_1^* は s_2^* に対して最適反応ではない。

   つまり、段階ゲームのナッシュ均衡を任意に組み合わせては均衡にならないということである。

2. grim-trigger 戦略として、$t = 1, 2, \ldots$ の期初における history h_t によって場合分けして、

$$s_1^*(h_t) = \begin{cases} D & \text{if } h_t = \emptyset \text{ or } h_t = (D,R)^{t-1} \\ U & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$s_2^*(h_t) = \begin{cases} R & \text{if } h_t = \emptyset \text{ or } h_t = (D,R)^{t-1} \\ L & \text{otherwise} \end{cases}$$

   という組み合わせを考える。この組み合わせが部分ゲーム完全均衡であるための条件を求めるのであるが、行動の名前以外は対称なゲームであるので、プレイヤー１についてだけ考えれば十分である。

   部分ゲームは２種類に分けられ、第１期（$h_1 = \emptyset$) またはずっと (D, R) が続いてきた場合の部分ゲームと、そうでない場合の部分ゲームである。後者においては、(U, L) という段階ゲームのナッシュ均衡を何があってもプレイする、という戦略になっているので、任意の δ についてナッシュ均衡である。前者について、s_1^* が unimprovable である条件を調べる。１回だけ行動を変えると、今期は最大で $u_1(U, R) = 6$ を得ることができるが、来期からは (D, R) 以外の行動が含まれた歴史の後、という部分ゲームに入る。そこでは毎期 (U, L) をプレイするので、合計すると

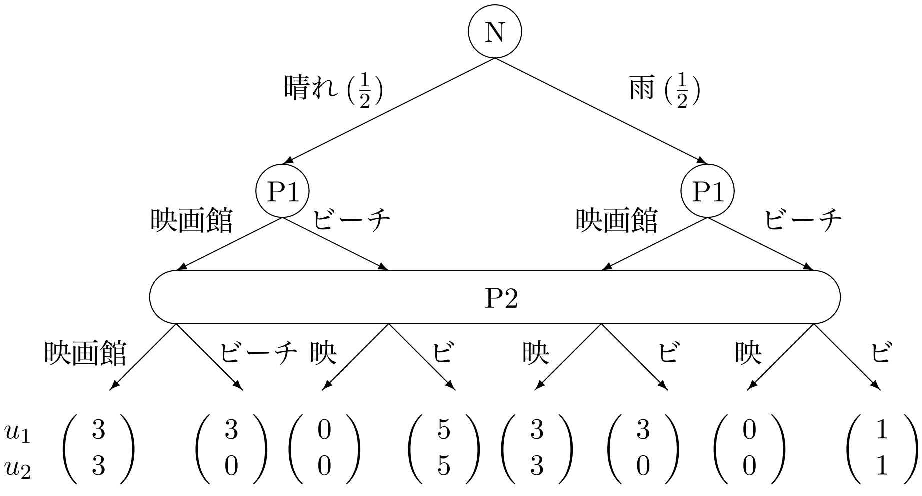
$$6 + \delta \cdot \frac{2}{1-\delta}$$

   が割引総利得である。これに対し、s_1^* に従うと、今期は $u_1(D, R) = 5$ で、来期以降も毎期 5 を得る。したがって、s_1^* が unimprovable である条件は

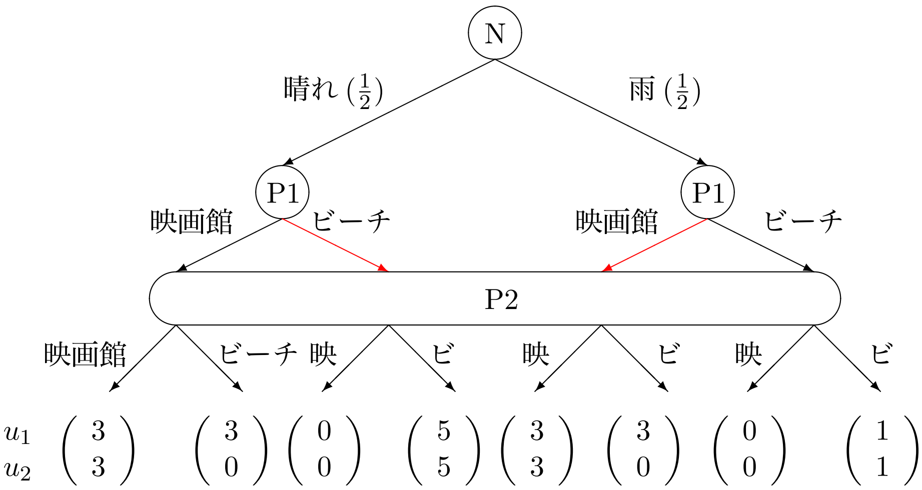
$$5 + \delta \cdot \frac{5}{1-\delta} \geqq 6 + \delta \cdot \frac{2}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{1}{4}$$

   ゆえに求める δ の下限は $\frac{1}{4}$ である。

3. (a) 利得ベクトルを縦に描いたものが以下（横でもいいが、わかりやすく。）

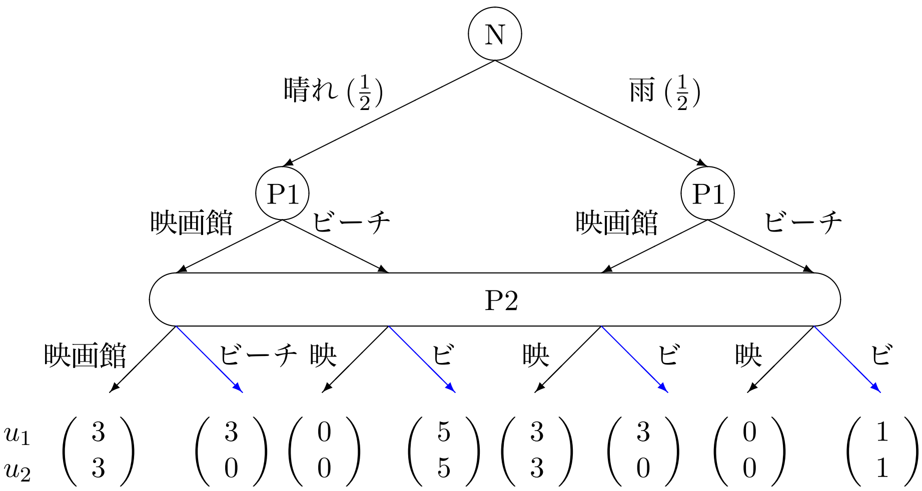


(b) 樹形図に P1 の戦略部分をマークしてみるとわかりやすい。



ゆえに、P2 が映画館という純戦略をすると期待利得は $\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}3$、ビーチをすると $\frac{1}{2}5+\frac{1}{2}0$ なので、ビーチという純戦略が最適反応である。(混合戦略をしてもビーチという純戦略より高い利得は得られない。)

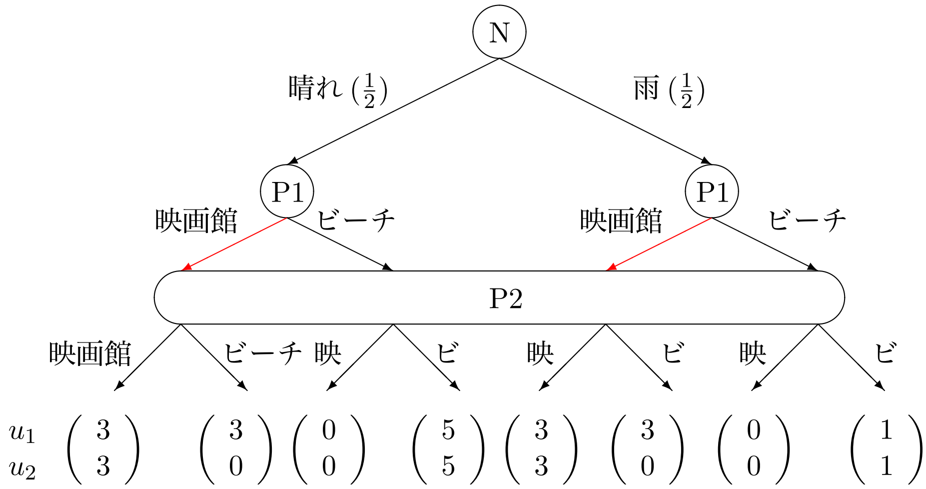
(c) P2 がビーチという純戦略をとるときを、以下のようにマークしてみる。



ゆえに、P1 が (ビーチ、映画館) をすると期待利得は $\frac{1}{2}5+\frac{1}{2}3$、(ビーチ、ビーチ) だと $\frac{1}{2}5+\frac{1}{2}1$、(映画館、ビーチ) だと $\frac{1}{2}3+\frac{1}{2}1$、(映画館、映画館) だと $\frac{1}{2}3+\frac{1}{2}3$ となり、純戦略の中では (ビーチ、映画館) が最も期待利得が高い。したがって、混合戦略まで考えてもこれだけが最適反応であり、

$(s_1, s_2)=($ (ビーチ、映画館)、ビーチ) はナッシュ均衡である。

(d) 同様に、(映画館、映画館) をまずマークして、P2 の最適反応を求める。



ゆえに、映画館だと期待利得は $\frac{1}{2}3+\frac{1}{2}3$、ビーチだと $\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}0$ なので、映画館が最適反応。

P1 について、(c) と異なり、晴れのときの P1 と雨のときの P1 で別々に最大化すると考えてみる。（P2 は映画館という純戦略とする。）

晴れのとき、P1 はどちらをすればよいか、で考えると、映画館に行くと 3 が得られ（期待利得ではない）、ビーチに行くと 0 である。したがって晴れのときは映画館に行くのがよい。（まだ最適反応ではない、戦略を作っていない。）

雨のとき P1 がどちらをすればよいかを考えると、映画館に行くと 3 が得られ、ビーチだと 0 である。

ゆえに、（映画館、映画館）という（行動）戦略が最適反応である。

まとめると、$(s_1, s_2)=($（映画館、映画館）、映画館）はナッシュ均衡である。