2013 年度　ゲームの理論 a 演習第 3 回解答

グレーヴァ香子

1. 任意の $w \in [\frac{1}{4}, 1]$ の後の A の意思決定のところから考える。

   E を選ぶと A の利得は $\frac{4}{5}w - \frac{1}{5}$、S を選ぶと $\frac{1}{5}w$ であるから、$\frac{4}{5}w - \frac{1}{5} \geqq \frac{1}{5}w$、つまり $w \geqq \frac{1}{3}$ のときは E が最適行動であり、$w \leqq \frac{1}{3}$ のときは S が最適である。

   そこで、
$$s_A(w) = \begin{cases} E & \text{if } w \geqq \frac{1}{3} \\ S & \text{if } w < \frac{1}{3} \end{cases}$$
   という A の戦略を考える。

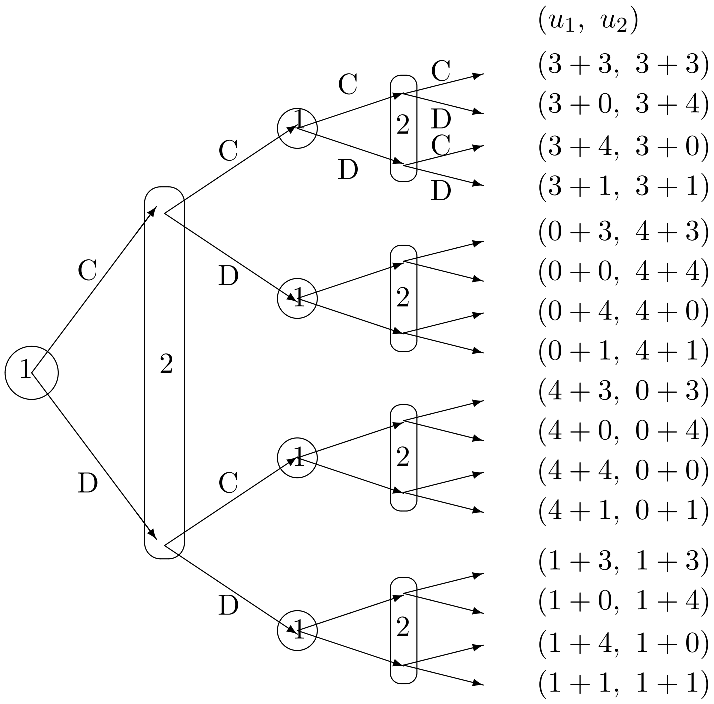
   最初に戻って P の意思決定を考える。$\frac{1}{3} \leqq w \leqq 1$ の範囲で提案すると A は s_A による E を選ぶ。このときの P の利得は $\frac{4}{5}(1-w)$ である。この中で P の利得を最大にするのは $w = \frac{1}{3}$ であり、このときの P の利得は $\frac{8}{15}$ である。

   $\frac{1}{4} \leqq w < \frac{1}{3}$ だと A は確実に S を選び、P の利得は $\frac{1}{5}(1-w)$ となる。この範囲で P の利得を最大にするのは $w = \frac{1}{4}$ であり、このとき $\frac{3}{20}$ しかもらえない。ゆえに、s_A に対する最適反応は $w = \frac{1}{3}$ という戦略となり、この組み合わせは均衡である。

   (A が $w = \frac{1}{3}$ のときに S を選ぶような純戦略を取ると、P には最適戦略がなくなるので、均衡とはならない。)

2. これは囚人のジレンマ！従って混合戦略の範囲でもナッシュ均衡はただ一つ (D, D) のみである。

3. (a) 同時なので 1 が先になくてもかまわないが、利得ベクトルの順序と合わせること。細かくて書ききれなかった部分の行動の名前は上が C で下が D。利得は計算過程がわかるように書いたが、もちろん計算結果を書いてよい。



   (b) プレイヤー 1 の情報集合は第 1 回目が一つ、第 2 回目は前回の結果に応じて 4 つある。一つの書き方は以下。
$$S_1 = \Big\{ s = (s_1, s_2) \mid s_1 \in \{C, D\},\ s_2 : \{C, D\} \times \{C, D\} \to \{C, D\} \Big\}$$
   s_2 が第 2 回目に対応し、1 回目の結果に対応した情報集合の集合 $\{C, D\} \times \{C, D\}$（history の集合ともいう）から行動への関数と考える。

この他、たった5つしか情報集合がないので、ベクトルとして行動を列記する手もある。

$$S_1 = \left\{ s = (a_1, a_{CC}, s_{CD}, s_{DC}, s_{DD}) \mid a_h \in \{C, D\},\ \forall h \in \{1, CC, CD, DC, DD\} \right\}.$$

ここでは、情報集合の集合を $\{1, CC, CD, DC, DD\}$ としている。読み手にわかるように書ければオーケー。

(c) 真部分ゲームは4つあって、プレイヤー1の2回目の情報集合から始まってその後の同時ゲームを切り取る形のものである。これらは全て囚人のジレンマとなっていることを確認する。1回目の利得は部分ゲーム内では固定されていて、G(2) の利得のうち、部分ゲーム内の行動で変更できるのは2回目の利得の部分だけであることを理解すればよい。

従って、プレイヤー1の2回目の情報集合から始まるどの部分ゲームにおいてもただ一つのナッシュ均衡があって、(D,D) である。つまり、

$$s_2^*(h) = D, \quad \forall h \in \{(C, C), (C, D), (D, C), (D, D)\}$$

を二人とも行う。

これらを踏まえてゲーム全体を考えると、1回目に何をしても2回目の利得はどちらのプレイヤーも3であるから、縮小した同時ゲームは

1\ 2	C	D
C	$3+3, 3+3$	$0+3, 4+3$
D	$4+3, 0+3$	$1+3, 1+3$

と考えることができる。(ここでは C,D は1回目の行動である。) したがってナッシュ均衡は (D,D)。

合わせると、$\Big((D, s_2^*), (D, s_2^*)\Big)$ という組み合わせがただ一つの部分ゲーム完全均衡である。ベクトルとして列記すると

$$\Big((D, D, D, D, D), (D, D, D, D, D)\Big).$$