2012年度　ゲームの理論a 演習第3回解答

グレーヴァ香子

1. (a) 図は最終ページ。

   (b) 第1期目の行動と、第2期目は第1期目の行動の組み合わせ (history) に応じて9通りの条件付き行動を決めるのが戦略。関数で書くと、$H_2 = \{A, B, C\} \times \{a, b, c\}$ が第2期の期初における history の集合、$H_1 = \{h\}$ をデフォルトの第1期期初の history とすると

   $$S_1 = \{s_1 \mid s_1 : H_1 \cup H_2 \to \{A, B, C\}\}$$

   がプレイヤー1の純戦略の集合、

   $$S_2 = \{s_2 \mid s_2 : H_1 \cup H_2 \to \{a, b, c\}\}$$

   がプレイヤー2の純戦略の集合。

   ベクトルで書くと、(第1期の行動、(A, a) 後の第2期の行動、(A, b) 後、(A, c) 後、(B, a) 後、(B, b) 後、(B, c) 後、(C, a) 後、(C, b) 後、(C, c) 後）の10の行動を指定したベクトルで、行動の範囲がプレイヤー1は $\{A, B, C\}$、プレイヤー2は $\{a, b, c\}$ になっていればよい。たとえば、プレイヤー1の集合は

   $$S_1 = \{A, B, C\}^{10}$$

   ただし、$s_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ における x_i は上記の順で決められた history 後の条件つ付き行動、とすればよい。プレイヤー2の純戦略の集合も座標と history の関係をはっきりさせれば同様に

   $$S_2 = \{a, b, c\}^{10}$$

   でよい。

   (c) ポイントは、

   (i) 第2期目はどの history の後でも（どの部分ゲームでも)、G のナッシュ均衡でなければならない、

   (ii) 第1期目に (C, c) を行ったら、第2期目は利得の高い G のナッシュ均衡である (B, b) を行い、第1期目に (C, c) でなかったら第2期目は利得の低い (A, a) をするようにアメとムチの構造にする

   という2点である。

   ただし、第1期目に (C, c) から逸脱するとしたら A か a に行くのが合理的なので、その場合だけ第2期に (A, a) をする、という罰が作られていれば、他の逸脱についてはどちらのナッシュ均衡を使ってもかまわない。

   例えば、

   $s_1^*(h) = C$, $s_1^*((C, c)) = B$ かつ $s_1^*(x) = A$ for $x \in H_2 \setminus \{(C, c)\}$

   $s_2^*(h) = c$, $s_2^*((C, c)) = b$ かつ $s_2^*(x) = a$ for $x \in H_2 \setminus \{(C, c)\}$

   とすればよい。これが部分ゲーム完全均衡であることを証明する。

   まず、第2期目はどの history の後でも、(B, b) または (A, a) になっているので、ナッシュ均衡である。そこで全体としてナッシュ均衡、すなわち各プレイヤーが相手の戦略を所与として利得の和を最大にしていることを示せばよい。プレイヤー1は s_1^* に従うと（相手は s_2^* に従っているとして)、$5 + 3 = 8$ の総利得を得る。他の戦略としては、第1期目の行動をかえる、第2期目の行動をかえる、両方かえる、などいろいろ考えられる。しかし、第2期目の行動をどこかの部分ゲームで変えても、第1期目の利得はその時点ではすでに確定しており、第2期目の相手の行動を考えると G のナッシュ均衡である s_1^* の行動をするのが利得を最大にする。

   ゆえに行動をかえるとしたら第1期目である。もし C でなく A または B をしたらどうなるかを考える。(混合行動に変えるとしても、実現した行動からの利得を考えるので、まず純行動の利得を計算する必要がある。)

   A に変えると、1期目は6が得られるが2期目は (A, c) 後の部分ゲームに行くので利得は1となり、合計は7である。これは s_1^* から得られる8より少ない。B に変えると、1期目は2、2期

目は 1 となり、合計利得はさらに少なくなる。これらを混合したり、C を混合したりしても、8 より大きい総利得を得ることはできないので、s_1^* が s_2^* に対する最適反応であることが言えた。同様にして、プレイヤー 2 も s_2^* が s_1^* に対する最適反応である。プレイヤー 2 は第 1 期目の行動を a に変えると、合計の利得は $6+1=7$、第 1 期目を b にすると $1+1=2$、これに対し、s_2^* では $5+3=8$ が得られる。

2. プレイヤー 1 について：

   プレイヤー 2 が a をすると $\max_{x\in\{A,B,C\}} u_1(x,a)=1$、

   プレイヤー 2 が b をすると $\max_{x\in\{A,B,C\}} u_1(x,b)=3$、

   プレイヤー 2 が c をすると $\max_{x\in\{A,B,C\}} u_1(x,c)=6$ であるから、このうち最小なのは 1 であり、$\underline{v}_1=1$。

   プレイヤー 2 について：

   プレイヤー 1 が A をすると $\max_{y\in\{a,b,c\}} u_2(A,y)=1$、

   プレイヤー 1 が B をすると $\max_{y\in\{a,b,c\}} u_2(B,y)=3$、

   プレイヤー 1 が C をすると $\max_{y\in\{a,b,c\}} u_2(C,y)=6$ であるから、このうち最小なのは 1 であり、$\underline{v}_2=1$ となる。

3. one-step deviation を考えて比較する。(s_1^A,s_2^A) から、$x=(C,c)^t$ あるいは $x=h$ のときに 1 期間だけ逸脱すると（どちらのプレイヤーでも）、(C,c) から得られる 5 ではなく、最大で 6 を得て、しかしその後はずっと 1 を得ることになる。したがって、

   $$5+\delta\cdot 5+\delta^2\cdot 5 \geqq 6+\delta\cdot 1+\delta^2\cdot 1+\cdots$$

   ならば s_i^A は最適反応である。（その他の部分ゲームにおいてはお互いナッシュ均衡を繰り返しているので最適反応である。）上の不等式は

   $$\frac{5}{1-\delta} \geqq 6+\frac{\delta}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{1}{5}$$

   なら成立する。

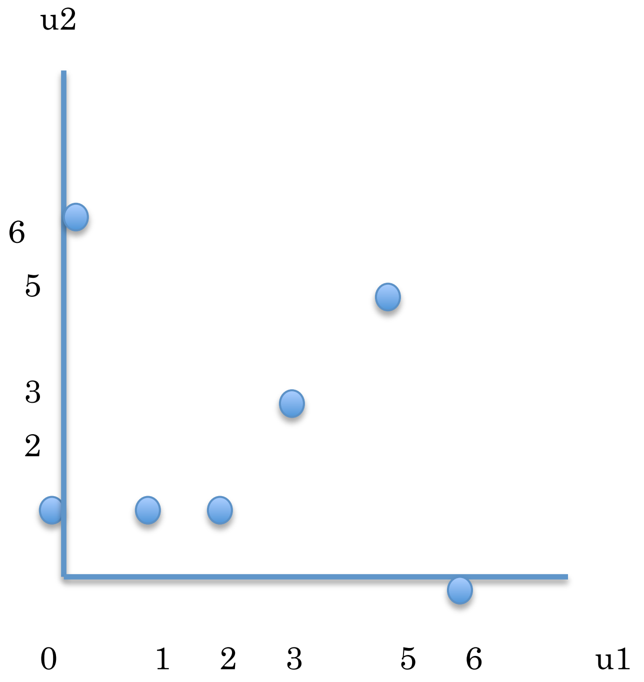
   (s_1^B,s_2^B) から逸脱する場合、

   $$5+\delta\cdot 5+\delta^2\cdot 5 \geqq 6+\delta\cdot 3+\delta^2\cdot 3+\cdots$$

   ならば s_i^B は最適反応である。この不等式を満たすには

   $$\frac{5}{1-\delta} \geqq 6+\frac{3\delta}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{1}{3}$$

   が必要であるから、(s_1^A,s_2^A) の組み合わせの方が低い δ で部分ゲーム完全均衡になる。これは、(s_1^A,s_2^A) の方が罰のときの利得が低い（罰が厳しい）からである。


u2
6
5
3
2
0
1
2
3
5
6
u1