2008年度　ゲームの理論a　学期末試験(70分)

グレーヴァ香子

A4サイズの紙１枚のみ持ち込み可。

- 以下の問全てに答えなさい。解答は問題の順番でなくてもよいが、どの問題に答えているのかを明記すること。
- 途中点があるので、思考の過程も書いておくこと。分数は無理に小数に直さなくてもよい。
- お話はすべてフィクションです。

1. 以下の同時ゲーム G について、設問に答えなさい。

P1 \ P2	a	b
A	3, 2	0, 0
B	0, 0	1, 4

(a) このゲーム G のナッシュ均衡を全て（混合戦略も含めて）求めなさい。

(b) 相関戦略が使えるとして、このゲーム G の実現可能な利得の組み合わせの集合を図示しなさい。（横軸にP1の利得をとり、縦軸にP2の利得をとりなさい。）その図の中に、(a) で求めたナッシュ均衡の利得の組み合わせを明記しなさい。

このゲーム G を無限回繰り返し、利得を δ で割り引くゲーム $G^{\infty}(\delta)$ を考える。簡単化のため、混合戦略（行動）も見える完全モニタリングであるとする。

(c) 以下のような $G^{\infty}(\delta)$ の戦略の組み合わせを考える。

奇数回目（初回を含む）：任意の歴史の後で、P1はAを、P2はaを行う。
偶数回目：任意の歴史の後で、P1はBを、P2はbを行う。

上記の戦略から得られるそれぞれのプレイヤーの割引総利得、平均利得（割引総利得に $(1-\delta)$ をかけたもの）、および割引因子 δ が１に収束したときの平均利得を求めなさい。（ヒント：割引総利得は、２回ずつで区切ってみる。）また、δ が１に収束したときの平均利得の組み合わせを (b) の図にわかるように描き入れなさい。

(d) 任意の歴史の後の部分ゲームを考える。相手が上記の戦略に従っているとき、どちらのプレイヤーも１回だけ逸脱しても、より大きな割引総利得が得られないことを示しなさい。

2. 高級自動車市場でA社とB社が価格競争をしている。A社の生産費用は１台につき100（万円）で、B社の生産費用は１台につき150（万円）であるとする。（これは何台生産しても同じとする。） 今週は２台の市場需要があるとする。企業の純戦略は価格で、ともに $\{300, 250, 200\}$ の中から一つの価格を選ぶとする。両社が同じ価格を選ぶと、それぞれその価格で１台ずつ売ることができる。異なる価格を選ぶと、安い方の企業が２台をその価格で売ることができ、高い方の企業は何も売れない。企業の利得は利潤（総売り上げー総費用）とする。たとえば、両社が同じ300という価格をつけたとすると、A社の利得は $300 \times 1 - 100 \times 1 = 200$（万円）、B社の利得は $300 \times 1 - 150 \times 1 = 150$（万円）となる。生産は受注を受けてから行うので、売れた数だけの費用がかかるとしてよい。このとき、以下の設問に答えなさい。

(a) ２社が同時に（相手の戦略を知らずに）価格を選ぶというゲームを考える。その行列表現を書き、純戦略のナッシュ均衡を全て求めなさい。

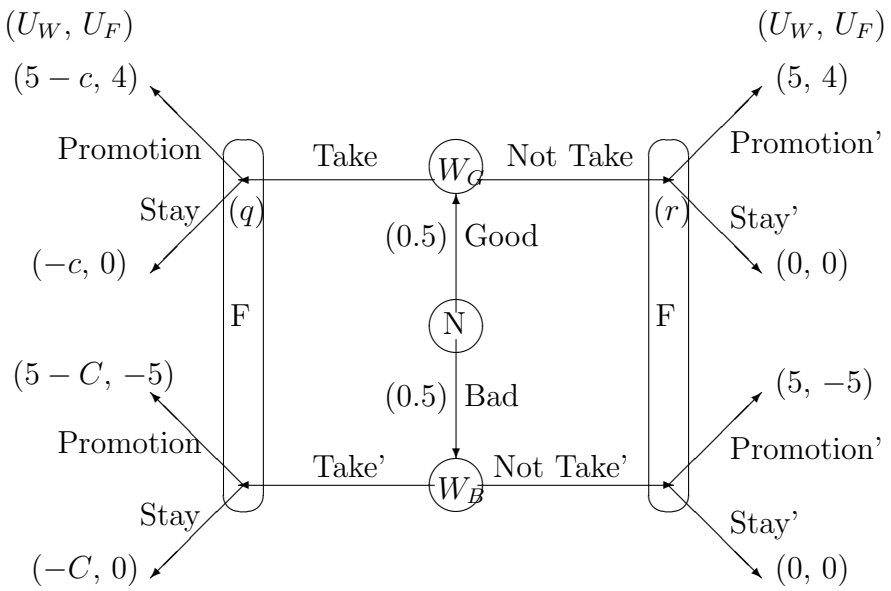
(b) B 社が先に価格を選び、それを見てから A 社が価格を決めるという完全情報の展開形ゲームを考え、純戦略の部分ゲーム完全均衡を 全て 求めなさい。（単に樹形図を描くだけでは部分点のみ。戦略の組み合わせを明記すること。）

(c) A 社が先に価格を選び、それを見てから B 社が価格を決めるという完全情報の展開形ゲームを考え、純戦略の部分ゲーム完全均衡を 全て 求めなさい。（上と同じ注意あり。）

3. ある企業 (F) が、ある従業員 (W) の昇進の査定の時期が近づいているのに、その人の本来の能力がよくわからない。企業の利得は従業員の能力 (Good または Bad）のみに依存して決まる。Good タイプの従業員を昇進させる（Promotion) と、企業の利得は 4、Bad タイプを昇進させると -5 であるとする。昇進させなければ (Stay)、どちらのタイプであっても企業の利得は 0 であるとする。Good タイプと Bad タイプの事前確率は 0.5 ずつであるとする。

(a) 事前の情報だけで企業が昇進の意思決定をするとき、期待利得を最大にするためには企業はこの従業員を昇進させるか？理由を明確にして答えなさい。

従業員 W はある資格の試験を受けようかと考え始めた。この資格は、業務そのものの能力を示すものではなく、企業の利得は従業員の本来の能力 (Good または Bad）のみに依存して決まることは変わらない。しかし、資格試験を受ける (Take) には仕事以外の勉強をしなくてはならず、勉強のコストは能力と関係がある。Good タイプにとって資格試験を受けることのコストを $c > 0$、Bad タイプにとってのコストを $C > 0$ とする。昇進の利得はどちらのタイプも 5、昇進がなければ 0 であるとする。W は昇進に関する利得と勉強のコストを合わせた総利得を最大にしようとする。以上のことはすべてのプレイヤーに知られているとする。樹形図は以下のようになる。以下、均衡とは Perfect Bayesian 均衡のことである。



(b) Good タイプの従業員だけが資格試験を受けるという純戦略の分離均衡を考える。この均衡が成立するための、資格試験を受けるコスト c と C の範囲をそれぞれ求めなさい。

(c) どちらのタイプの従業員も資格試験を受けないという一括均衡を考える。もし、資格試験を受けたら、企業の信念（q) は $q > \frac{5}{9}$ になるというケースを考える。このとき、どちらのタイプも試験を受けないということが W の最適反応になるためのコスト c と C の範囲をそれぞれ求めなさい。

(d) 上記の分析を踏まえて、資格試験が難しすぎたり、易しすぎたりすると、スクリーニングとしての機能はどうなるか議論しなさい。