2007年度　ゲームの理論a　期末試験解答

1. (a) good のときの同時ゲームでは、Not は Buy に支配されているので、(Buy, Buy) のみがナッシュ均衡である。

   bad のときは、純戦略のナッシュ均衡が二つあり、(Buy, Buy) と (Not, Not) である。ここから、混合戦略のナッシュ均衡もありそうなことがわかる。プレイヤー２が Buy をする確率を q として、プレイヤー１の最適反応を求めると以下のようになる。

$$BR_1(q) = \begin{cases} \{Buy\} & \text{if } q > \frac{5}{6} \\ \Delta\{Buy, Not\} & \text{if } q = \frac{5}{6} \\ \{Not\} & \text{if } q < \frac{5}{6} \end{cases}$$

   プレイヤー２についてもまったく同じ計算ができるので、混合戦略のナッシュ均衡は、第１座標を Buy の確率とすると $((\frac{5}{6}, \frac{1}{6}), (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}))$ である。

   (b) プレイヤー１の戦略は good のときと bad のときそれぞれの行動の組み合わせである。（good のときの行動、bad のときの行動）と書くとすると、$(B, B), (B, N), (N, B), (N, N)$ の４つある。プレイヤー２は情報を知らないので Nature の選択に依存せず、Buyつまたは Not を選ぶのが戦略である。期待利得を計算すると以下のようなベイジアン標準形の行列表現が書ける。

P1 \ P2	Buy	Not
(B,B)	3.7, 3.7	-2, 0
(B,N)	3, -0.5	1.5, 0
(N,B)	0.7, 2.2	-3.5, 0
(N,N)	0, -2	0, 0

   (c) (b) より、純戦略によるベイジアンナッシュ均衡は二つあって、((B,B),B) と ((B,N),N) である。

2. このゲームを１回だけするときのナッシュ均衡は (A,A) (C,C) である。このどちらかを２回目は使う。(A,A) の方が利得が低いので、こちらを「罰」として使用し、(C,C) を「ご褒美」とするような戦略を考えればよい。特に、一回目に P1 が B を出すとすると、P2 は C をしたくなり、逆に P2 が B をするとき、P1 は A をしたくなるので、１回目に (B,C) か (A,B) が起こったら「罰」を与えるような形にしないとプレイヤーたちは１回目に B をしなくなる。

   このような構造の戦略は多数ある。（一回目の行動、（２回目の行動計画））という順にして、２回目の行動計画は左から (A,A),(A,B),(A,C),(B,A),(B,B),(B,C),(C,A),(C,B),(C,C) の後の行動とすると

$$(B, (*, A, *, *, C, A, *, *, *))$$

   という形の戦略なら $*$ のところは (A,A) (C,C) のどちらでもよい。

   （解答としては、このような形の戦略の組を一つ答えればよいとした。例えば、「１回目は B をし、２回目は、(B,B) の後だったら C を、そうでなかったら A をする」という純戦略が答えられれば十分である。）

   ２回目の部分ゲームはすべてナッシュ均衡になっているので、全体でナッシュ均衡になっているかを調べよう。プレイヤー２が上記の戦略をしているとして、プレイヤー１の最適反応を考える。動的計画法より、１回目の行動を選んで２回の利得の和が最大になっているものを探せばよい。一回目に A をすると、利得の和は $6 + 2 = 8$、一回目に B をすると $5 + 4 = 9$、一回目に C をすると $2 + 2 = 4$ または $2 + 4 = 6$ であるから、B をするのが最適であることがわかる。

プレイヤー1が上記の戦略をしているとき、プレイヤー2が一回目にAをすると総利得は最大で$0+4=4$、一回目にBをすると$5+4=9$、一回目にCをすると$6+2=8$であるから、やはりBをするのが最適である。

3. (a) 乙姫がpoolingをしているので$q=0.6$のままである。箱をあける戦略の期待利得は$(0.6)(-5)+(0.4)10=1$で、あけないときの利得0より大きいのであけるべきである。

   (b) (a)の議論から、乙姫がpoolingをしているとき、浦島は箱をあける。すると乙姫の利得は5である。もし、どちらかのタイプの乙姫がNot Giveにすると利得は0に下がってしまうので、乙姫も最適反応をしている。ゆえに

$$((Give,\ Give'),\ Open,\ q=0.6)$$

   は完全ベイジアン均衡である。