講義ノート

伊藤幹夫

平成10年 1月 8日

Chapter 4

非線形景気循環理論の系譜

4.1　カルドアの景気循環モデル

これまで扱ってきた乗数・加速度原理による理論は、総需要の構成項目としての投資に着目している。しかし、生産能力を拡大するという投資のもう一つの側面に関しては十分配慮されていない。カルドアは投資が予想利潤に依存するという想定の下で、生産水準に依存した粗投資関数を考え、興味深い景気循環モデルを構築した。[1]

注意 2 以下では、各経済変量は「粗」の量とする。つまり、減価償却を考慮して体系を考える。

仮定 3 負の粗投資は存在しない。つまり、純投資には（マイナス減価償却）という下限が存在する。

4.1.1　カルドアのモデルの概要

さて、企業家の目的は利潤の最大化であるが、投資計画において重要な役割を果たすのは、現在の利潤というより予想利潤である。カルドアは、この予想利潤が大きいとき投資が大きいとする。この予想利潤を決定する要因として、産出量と資本ストックを考える。

[投資決定要因としての産出量]　産出量が十分大きな水準では、投資材産業への需要圧力から投資材価格は上昇し、資金調達も困難になる。よって、限界的な所得の増加に対する限界的な投資の増分$\frac{\partial I}{\partial Y}$は適正な産出水準のときに比較して大きくない。また、産出量が低い水準では、生産能力が過剰であり、あまり投資する誘因を企業家は感じないだろう。よってこの場合も、限界的な所得の増加に対する限界的な投資の増分$\frac{\partial I}{\partial Y}$は適正な産出水準のときに比較して大きくない。

[1] Kaldor, N., "A Model of the Trade Cycle," *Economic Journal*, **50**, 1940, pp.78-92

[投資決定要因としての資本量] 資本Kが増大すると資本１単位あたりの産出量は減少するので予想利潤 (現利潤も) は低下する。よって、投資量は、資本ストックの減少関数と考えられる。

以上のことを次のような投資関数で表わす。

$$I = \Phi(Y,\, K) \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y} > 0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial K} < 0\right)$$

次に純投資は減価償却率をδとすると、$I - \delta K$であるから、

$$\begin{cases} I = \Phi(Y,\, K) \\ I = \delta K \end{cases} \tag{4.1}$$

とおき、Kを消去して得られるIとYの組み合わせは、純投資をゼロにする。この曲線を

$$I^o = D(Y)$$

と書くことにする。

注意 3 この曲線の傾きはあまり意味がないが、Kを消去して計算すると

$$\frac{dI}{dY} = \delta \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\left(\delta - \frac{\partial \Phi}{\partial K}\right)^{-1} > 0$$

から、右上がりになることがわかる。この曲線の上の領域では純投資が正になり、下の領域では純投資が負になる。

貯蓄関数は、簡単に

$$S = sY$$

を考える。

均衡産出量は、貯蓄関数と投資関数の交点によって定まる。

以上を、x軸にYをy軸にSとIをとって描くと、図4.1のようになる。

4.1.2 カルドアのモデルの循環の仕組み

カルドアのモデルでどのように循環が起こるかを簡単に述べる。図4.1において現状がIにあるとする。この点は貯蓄と投資が均等している。ここでは、純投資が負になっている。(純投資ゼロ線の下にあるから。) よって、粗投資が非負でありながら、純投資が負であるため、資本ストックは減少を始める。このことは図で、投資関数の左上シフトとして表わされる。

投資関数の左上シフトは、貯蓄・投資の均等による均衡産出水準を貯蓄関数にそって右方向に押し上げる。投資関数の左上シフトが限界に達し、図の上の投資関数の状態になっ

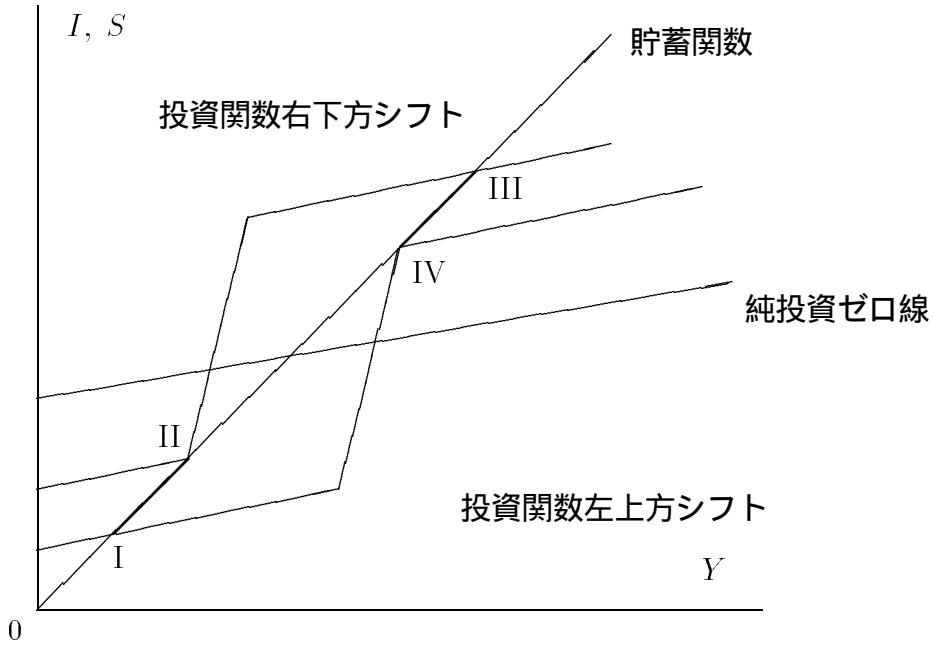

図 4.1: カルドアのモデルの循環

たとする。 (このとき産出量はIIの水準。) さらに資本が目減りした次の瞬間、均衡産出量は、IIIの水準にジャンプする。

この点IIIは、純投資ゼロ線の上にあり純投資が正であるから、資本ストックは増加を開始する。資本ストックの増加は投資関数の右下シフトをもたらし、均衡産出水準は、貯蓄関数にそって減少する。この減少は、投資関数の右下シフトが限界に達し、図の下の投資関数の状態になるまで続く。 (このとき産出量はIVの水準。) さらに資本が増加した次の瞬間、均衡産出量は、Iの水準にジャンプする。

以上で1サイクルが終わる。 ($\mathrm{I} \to \mathrm{II} \to \mathrm{III} \to \mathrm{IV} \to \mathrm{I}$の順で循環する。)

上のような循環が起こるための仮定として、カルドアは図に鑑みて次のものが貯蓄関数と投資関数に必要だと考えた。

1. $\frac{\partial I}{\partial Y} > \frac{\partial S}{\partial Y}$が適正水準の投資で成立

2. $\frac{\partial I}{\partial Y} > \frac{\partial S}{\partial Y}$が適正水準を極端に下回る投資と極端に上回る投資で成立

3. $\dot{Y} = \dot{K} = 0$を満たす定常点が適正水準

という仮定を置いた。これらは、純投資ゼロ線と貯蓄関数の交点 (定常均衡) において、投資関数が貯蓄関数を下から上へ切ること、またそれ以外に定常均衡の存在を言うために十分大きな産出に対応する投資および、十分小さな産出に対する投資に対して、投資関数が貯蓄関数を上から下へ切ることを言明している。

これらは、図で考えている分にはもっともらしい。しかし、完全に数学的に厳密に定式化されていないため、多くの経済学者がこれを問題にした。

4.1.3 カルドアのモデルの数学理論

ここでは、カルドアのモデルの数学的な定式化を考え、永続的な循環が起こる条件を探す。[2]

利潤原理に基づく投資関数・貯蓄関数を

$$\begin{cases} I = I(Y,K) \\ S = S(Y,K) \end{cases}$$

と書く。

仮定 **4**

$$I_Y := \frac{\partial I}{\partial Y} > 0, \quad I_K := \frac{\partial I}{\partial K} < 0$$
$$S_Y := \frac{\partial S}{\partial Y} > 0, \quad S_K := \frac{\partial S}{\partial K} < 0$$

を置く。

仮定 **5**

$$I_K - S_K < 0$$

とする。

カルドアの体系は、調整速度を$\alpha > 0$として

$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha\left(I(Y,K) - S(Y,K)\right) \\ \dot{K} = I(Y,K) \end{cases}$$

と表現される。なお、このパラメターαは元々のカルドアの体系にはなかったことに注意せよ。以下、この体系の性質を調べる。

まず、この体系の定常均衡点について考えよう。$\dot{Y} = 0$を満たす点は$I(Y,K) = S(Y,K)$を満たす(Y,K)の集合である。これは、曲線でその傾きは、Y-K平面で

$$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{\dot{Y}=0} = \frac{S_Y - I_Y}{I_K - S_K}$$

であり、S_YとI_Yの大きさに依存して決まる。右辺の分母は仮定より負であることに注意せよ。

一方、$\dot{K} = 0$を満たす点は$I(Y,K) = 0$を満たす(Y,K)の集合である。これは、曲線でその傾きは、Y-K平面で

$$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{\dot{K}=0} = -\frac{I_Y}{I_K} > 0$$

となり、われわれの仮定の下で、常に右上がりである。

次に、

[2] ここでの議論は、Chang, W. W and D. J. Smyth, "The Existence of Cycles in a Non-linear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined," *Review of Economic Studies*, **38**, 1971, pp.37-44 をもとにした。

仮定 6

$$I_K S_Y < S_K I_Y$$

と置く。これは、動学体系のヤコビ行列

$$\frac{\partial(\dot{Y},\,\dot{K})}{\partial(Y,\,K)} = \begin{pmatrix} \alpha(I_Y - S_Y) & \alpha(I_K - S_K) \\ I_Y & S_K \end{pmatrix}$$

を定常均衡点で評価したときの行列式、$\alpha(S_K I_Y - S_Y I_K)$ が正になることを保証する。これにより、特性方程式が正と負の実根をもつという、鞍点の状況が避けられる。

注意 4 特性方程式のトレースは、$\alpha(I_Y - S_Y) + I_K$ であるから、これを定常均衡点で評価したとき、

$$\alpha(I_Y - S_Y) + I_K < 0 \Longleftrightarrow \text{安定}$$

$$\alpha(I_Y - S_Y) + I_K > 0 \Longleftrightarrow \text{不安定}$$

である。

循環の存在を証明するための数学的基礎は次の定理である。

定理 2 (ポアンカレ = ベンディクソン) 2 次元の常微分方程式体系

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

がコンパクトな不変集合を持ち、かつその不変集合に安定な均衡点が存在しないとき、極限閉軌道が存在する。

なお、不変集合とはその集合の任意の点を初期点とする体系の動学経路が、そこに留まり続けるような集合である。

以上のことを考慮すると、次の命題が成立する。

命題 1

$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha\left(I(Y,K) - S(Y,K)\right) \\ \dot{K} = I(Y,K) \end{cases}$$

が、

1. $I_K < S_K < 0,\ I_Y > 0,\ S_Y > 0$
2. 唯一の定常均衡点 (Y^*, K^*) において、$\alpha(I_Y - S_Y) + I_K > 0$、$I_K S_Y < S_K I_Y$
3. $I(0,\tilde{K}) = 0$ となる $\tilde{K} > 0$ が存在する。また、$I(Y,0) = S(Y,0)$ かつ $Y > Y_1,\ K \geq 0$ に対して $I(Y,K) < S(Y,K)$ となる $Y_1 > 0$ が存在する。
4. $\dot{Y} = 0$ を満たす曲線は、K 軸に漸近する。

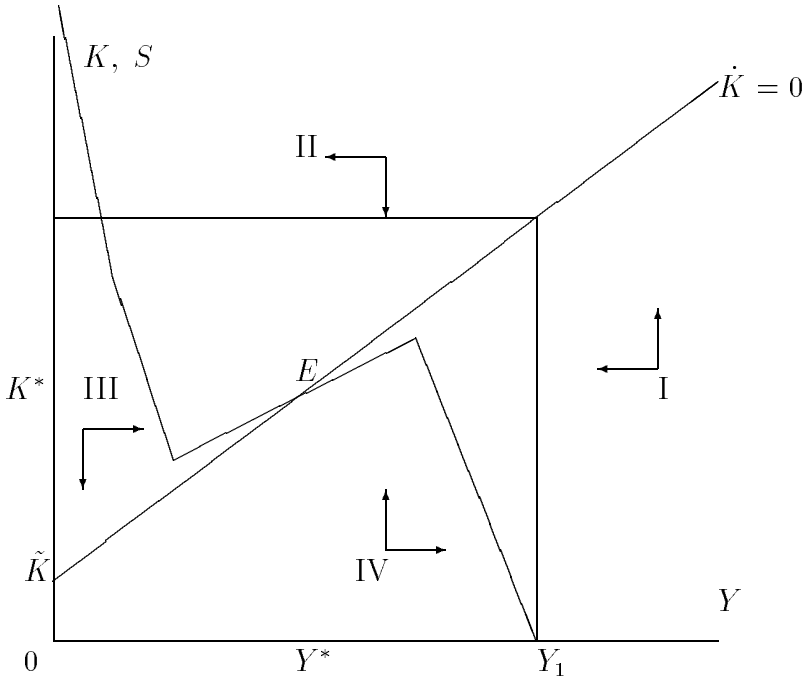

図 4.2: カルドアの数理モデル

を満たすとき、体系は構造安定な極限閉軌道を持つ。

[証明の概略] 定理の前提のもとで体系の位相図は図のように描かれる。コンパクトな集合が作れて、それは不変集合である。また、定常均衡点は不安定なことがわかっている。よって、ポアンカレ = ベンディクソンの定理より構造安定な極限閉軌道が存在する。

注意 5 上の議論で注目すべきは、閉軌道の存在条件に調整速度αが関係するかも知れないことである。

また、

定理 3 (ベンディクソン)

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

が連続微分可能な体系のとき、$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$がある領域$D$で定符号のとき、$D$には極限閉軌道が存在しない。

というベンディクソンの定理を考えると、上の命題に登場する不変集合であるコンパクト集合上で、トレース$\alpha(I_Y - S_Y) + I_K$が定符号になりえないことがわかる。このことは、極限閉軌道のような構造安定的な周期解の存在のためには、投資関数 (あるいは貯蓄関数) についての非線形性が不可欠であることを示唆している。

カルドアのモデルは、貯蓄と投資の均等のみを均衡条件とするもので、貨幣市場の均衡が考慮されていない。以降の二つの節では、IS-LM 曲線を基礎とした景気循環モデルを考える。

4.2 シナジー(1981)のモデル

シナジーは、IS-LM 曲線を基礎にして、非線形景気循環モデルをつくった。財市場の超過需要に従って、財市場が調整されるとし、政府財政赤字が通貨増発によって賄われるとして、動学方程式を導いた。[3]以下これを見る。

4.2.1 シナジーのモデルの基本設定

$I(Y,r)$を投資関数、$S(Y_d,W)$を貯蓄関数、$T(Y+B)$を租税関数とする。なお、Yは産出、Mは通貨供給量、Y_dは可処分所得であり、公債発行量Bを用いて、

$$Y_d = Y + B - T(Y+B)$$

と書かれる。Gは政府支出、rは利子率、Wは資産残高とする。公債としてはコンソルを考える。よって

$$W = M + \frac{B}{r}$$

である。ただし、議論を簡単化するため

仮定 7 物価水準は一定とする。

を置く。また、投資関数、貯蓄関数、租税関数については

仮定 8 $I_Y > 0,\ I_r < 0,\ S_Y > 0,\ S_W < 0,\ T' > 0$

とする。

さて、財市場の数量調整は超過需要に比例すると考える。つまり、

$$\dot{Y} = \alpha\left(I(Y,r) - S(Y_d,W) + G + B - T(Y+B)\right) \quad (\alpha > 0) \tag{4.2}$$

である。

一方、貨幣市場は貨幣の需給がつねに成立していると仮定し、貨幣供給Mとし、LM曲線、

$$r = J(Y,M,B) \tag{4.3}$$

を曲線を直接考え、

仮定 9

$$J_Y > 0,\ J_M > 0,\ J_B > 0$$

と置く。

シナジーはさらに簡単化のため、

[3]Schinasi, G. J., "A Nonlinear Dynamic Model of Shsort Run Fluctuation," *Review of Economic Studies*, **48**, 1981, pp.649-656を見よ。

仮定 **10** I_Y以外の偏微係数は一定とする。

を置く。

さて、(4.2)の右辺をゼロとおき、GとMを一定とするとIS曲線が得られる。その傾きは、

$$\frac{dr}{dY} = -\frac{I_Y - S_Y(1-T') - T'}{I_r + S_W(B/r^2)} \tag{4.4}$$

となる。他方、LM曲線の傾きはJ_Yそのものである。

ここで、シナジーはやや不自然な想定をする。つまり、投資関数がカルドアのそれのようにS字型であり、そのため$\frac{dr}{dY}$は所得が極端に低いときには負、次に正に転じ、所得が増えると再び負に転ずる。そして、このときIS曲線とLM曲線は図のように、三点で交わる。真ん中の均衡点を適正産出水準とよび、Y^*と書く。なお、

仮定 **11**

$$G + B = T(Y^* + B)$$

とする。つまり、適正産出水準において均衡財政となる。

注意 **6** $T' > 0$より

$$\begin{array}{l} Y < Y^* \Longrightarrow G + B > T(Y + B) \text{ 赤字} \\ Y > Y^* \Longrightarrow G + B < T(Y + B) \text{ 黒字} \end{array} \tag{4.5}$$

最後に、すでに触れたように、政府の財政赤字は通貨増発によって賄われるとする。これは、

$$\dot{M} = G + B - T(Y + B) \tag{4.6}$$

と表わされる。

4.2.2 シナジーのモデルの循環

(4.2)を時間について微分し、可処分所得、資産残高の定義ならびに、(4.3)を用いて、二階の微分方程式

$$\begin{aligned} \ddot{Y} &= \alpha\left\{I_Y - S_Y(1-T') - T' + \left(I_r + S_W\frac{B}{r^2}\right)J_Y\right\}\dot{Y} \\ &\quad +\alpha\left\{\left(I_r + S_W\frac{B}{r^2}\right)J_M - S_W\right\}\dot{M} \end{aligned} \tag{4.7}$$

記法の簡単化のため

$$Z = -\left(I_r + S_W\frac{B}{r^2}\right) > 0$$

とし、(4.6)を代入し、

$$\omega = \frac{dr}{dY}$$

と書くことにすると、

$$\ddot{Y} + \alpha Z(J_Y - \omega)\dot{Y} + \alpha(S_W + ZJ_M)(G + B - T(Y + B)) = 0 \tag{4.8}$$

最後に、

仮定 **12** $S_W + ZJ_M$はつねに負とする。

われわれは、次のレヴィンソンの定理を用いる。

定理 **4**（レヴィンソン)

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

は、

1. fとgがともに、すべての点で連続微分可能
2. ある正数a、bが存在して$-a \leq x \leq b$であれば$f(x) \geq 0$で、それ以外の時$f(x) < 0$となる
3. 任意のゼロでないxについて$xg(x) \neq 0$
4. $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(\xi)d\xi = \lim_{x\to\infty} \int_0^x g(\xi)d\xi = \infty$
5. $\int_{-a}^{b} g(\xi)d\xi = 0$

のとき一意な極限閉軌道を持つ。

命題 **2** 上のシナジーのモデルは、I_YがY^*について対称なとき、一意の極限閉軌道を持つ。

[証明の概略] 仮定 10 により、$y = Y - Y^*$という変数変換を行なっても体系 (4.8) は本質的な変更を受けない。

$$\ddot{y} + \alpha Z(J_Y - \omega)\dot{y} + \alpha(S_W + ZJ_M)(G - T(y + Y^* + B)) = 0 \tag{4.9}$$

である。命題の仮定の下、ある正数aとbが存在して、$Y^* - a$ならびに$Y^* + b$で評価したときのIS曲線の傾きとLM曲線の傾きが等しく、$a = b$が満たされる。以下、
(4.9) についてレヴィンソンの定理の前提が満たされることを確認すればよい。連続性はよいとして、$\alpha Z(J_Y - \omega)$の符号はLM曲線とIS曲線の傾きの差の符号に等しいから、これが負となるのは前提の$-a$とbの間である。よって、レヴィンソンの定理の$-a$とbに対応するものとしてそれらを考えればよい。次に、均衡財政についての仮定と、租税関数についての仮定から、ゼロでないyについて

$$\alpha(S_W + ZJ_M)(G + B - T(y + Y^* + B))y > 0 \tag{4.10}$$

が成立する。最後の仮定の成立はT'が定数であることと、$a + b = 0$から明らか。 (おわり)
シナジーのモデルは、循環の存在を示すために極端にうねりのあるIS曲線を考えており、不自然なモデルであるとの印象がある。また、供給サイドについても何の考慮もされていない。この点を改良したものとして、次の節でベナシーのモデルを取り上げる。

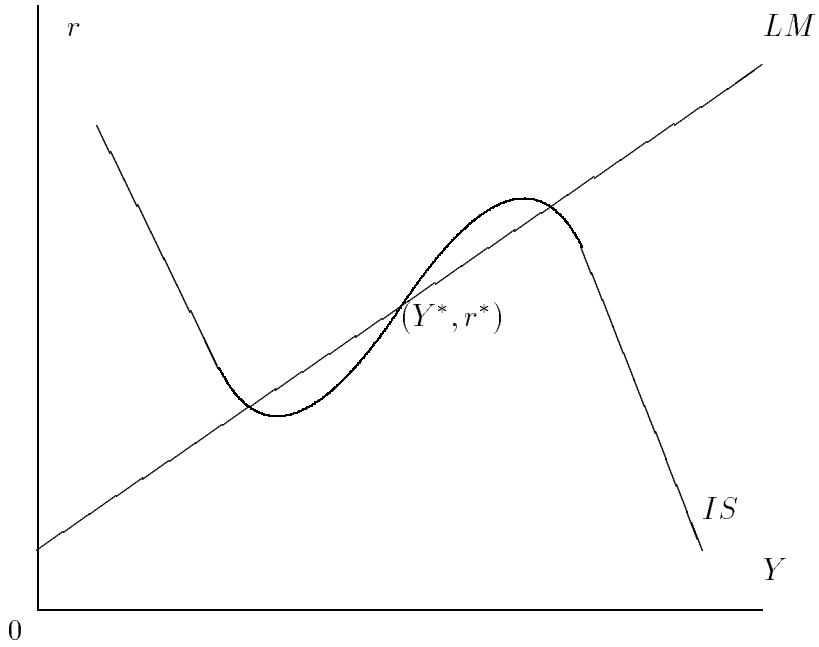

図 4.3: シナジーのモデル

4.3 ベナシー (1984) のモデル

ベナシーは、投資関数、IS 曲線、フィリップス曲線について極端に不自然な仮定を置くことなく、極限閉軌道をもたらすモデルを考えた。[4]

4.3.1 ベナシーのモデルの基本設定

x は期待需要、yは産出量、rは利子率、p は物価、$\bar{m}$は貨幣供給量とする。$C(y,p)$ は消費関数、$I(x,r,p)$ は投資関数、$L(y,r,p)$ は貨幣需要関数とする。このとき、財市場の均衡と貨幣市場の均衡は、

$$\begin{cases} y = C(y,p) + I(x,r,p) \\ L(y,r,p) = \bar{m} \end{cases} \tag{4.11}$$

これが総需要関数を構成する。

注意 7 伝統的な IS-LM分析とは、期待需要を導入している点で異なっている。$x = y$とすれば、伝統的な IS-LM分析と一致する。

$y - x$ は不均衡を表す指標と考えられる。結局、これの不均衡は財市場の事前の不均衡を反映するという意味で、後述の適応期待の想定も不自然ではないかもしれない。

[4]Benassy, J. P., "A Non-Walrasian Model of the Business Cycle," *Journal of Economic Behavior and Organization*, **5**, 1984, pp.77-89 を見よ。なお、フィリップス曲線の非線形性から循環を導くモデルとして、Rose, H., "On the Non-linear Theory of the Employment," *Review of Economic Studies*, **34**, 1967, pp.153-173 がある。この論文は、ポアンカレ＝ベンディクソンの定理を景気循環に応用した最も初期のものであろう。

なお、消費関数、投資関数、貨幣需要関数の偏微係数について次の仮定を設ける。

仮定 **13**
$$\begin{array}{lll} 0 < C_y < 1 & C_p < 0 & \\ I_x > 0 & I_r < 0 & I_p < 0 \\ L_y > 0 & L_r < 0 & L_p > 0 \end{array} \tag{4.12}$$

また、$p \neq 0$ に対して、$C(0,p) > 0$ とする。

ここでモデルの動学的要因として、投資活動そのものよりフィリップス曲線に基づく賃金動学方程式と期待需要量の動学方程式としての適応期待を考える。

まず、 (名目) 賃金率 w と失業量 (失業の絶対量) u に

$$\dot{w} = \phi(u) \quad (\phi' < 0) \tag{4.13}$$

を考える。これは、二つの意味で伝統的なな意味でのフィリップス曲線ではない。つまり、独立変数が失業率ではなく失業量になっていることに加えて、賃金の変化が相対的なものではなく絶対的なものになっている。さらに、

仮定 **14**
$$\lim_{u \to 0} \phi(u) = -\infty$$

を仮定する。また、$\hat{u}$を$\phi(u) = 0$ を満たす失業水準とし、自然失業率水準とよぶ。

完全雇用水準を ℓ_0、生産関数を $F(\ell)$ とすると、$u = \ell_0 - F^{-1}(y)$ であるから、

$$\varphi(y) = \phi\left(\ell_0 - F^{-1}(y)\right)$$

とおけば、$\varphi' > 0, \ \lim_{y \to F(\ell_0)} \varphi(y) = \infty$ である。われわれは、動学方程式としてこの$\varphi(y)$ を用いた、

$$\dot{w} = \varphi(y) \tag{4.14}$$

を採用する。また、$\hat{u}$に対応する産出水準を$\hat{y}$と書く。

一方、期待需要については適応期待を考え、

$$\dot{x} = \theta(y - x) \quad (\theta > 0) \tag{4.15}$$

を考える。

4.3.2 総需要と総供給

さて、(4.11) は期待需要 x と物価 p に対して財 ・貨幣市場が均衡する産出量と利子率を決定する。特に yについての解は総需要関数をもたらす。これを $y = K(x,p)$ と書くことにしよう。[5] この総需要関数の形状ついては、

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{I_x L_r}{(1 - C_y)L_r + L_y L_r} > 0 \\ K_p &= \frac{(C_p + I_p)L_r - I_r L_p}{(1 - C_y)L_r + L_y L_r} < 0 \end{aligned}$$

が成立する。

[5] 利子率についても $r = J(x,p)$ のように書けるが、以下の分析には関係がない。

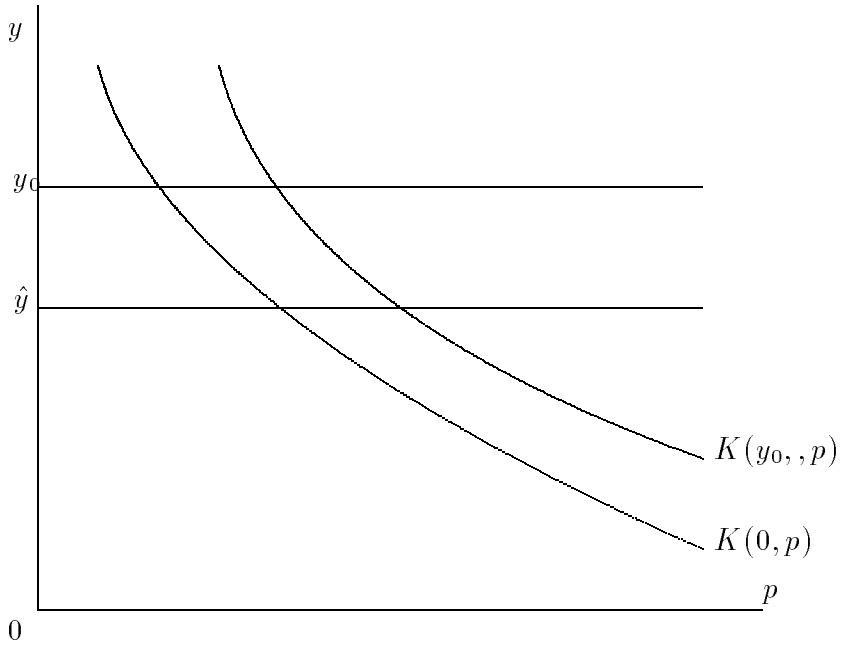

図 4.4: $K(x,p)$ の形状

注意 8 仮定(13)から、$C(0,p)>0$ だから $K(x,p)>0$ がつねに保証される。

ここで、総需要関数に ad hoc な仮定を設ける。

仮定 15

$$\lim_{p\to 0} K(0,p) > y_0, \quad \lim_{p\to\infty} K(y_0,p) < \hat{y}$$

供給の均衡としては、いわゆるショート ・サイド ・ルールを考える。つまり、

$$y = \min\left\{ F\left(F'^{-1}\left(\frac{w}{p}\right)\right),\ y_0 \right\} \tag{4.16}$$

である。ここで、$y_0 = F(\ell_0)$ は完全雇用産出水準である。
短期均衡は、期待需要 x を所与として

$$y = K(x,p) \tag{4.17}$$

$$y = \min\left\{ F\left(F'^{-1}\left(\frac{w}{p}\right)\right),\ y_0 \right\} \tag{4.18}$$

で定まる y と p である。

注意 9 仮定 *(15)* から、ゼロから y_0 の間のすべての x について、上の短期均衡が存在する。一般に y_0 を超える x についても定義されるが、あまり興味の対象とならない。

注意 10 フィリップス曲線についての仮定から、y が y_0 に近づくと賃金率が無限大となり、完全雇用は一般に達成されない。

よって、体系の供給サイドとしては、(4.16) のかわりに

$$y = F\left(F'^{-1}\left(\frac{w}{p}\right)\right) \tag{4.19}$$

を考えれば十分である。結局、x を所与とする短期均衡 y, r, p は体系

$$\begin{cases} y = C(y,p) + I(x,r,p) \\ L(y,r,p) = \bar{m} \\ y = F\left(F'^{-1}\left(\frac{w}{p}\right)\right) \end{cases} \tag{4.20}$$

の解である。この短期均衡水準の産出を $H(x,w)$ と表わす。

上の第三式の右辺を $S(p,w)$ とおくと

$$S_p > 0, \quad S_w < 0$$

が生産関数についての標準的な仮定

仮定 **16**

$$F' > 0, \quad F'' < 0$$

から導ける。

さらに、関数 $H(x,w)$ の偏微係数は、

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{S_p K_x}{S_p - K_p} > 0 \\ H_w &= \frac{-K_p S_w}{S_p - K_p} < 0 \end{aligned}$$

と求められる。

注意 **11** 関数 $K(x,p)$ についての仮定から、

$$\lim_{w \to 0} H(0,w) > y_0, \quad \lim_{w \to \infty} H(y_0,w) < \hat{y}$$

が成立する。また、すでに計算した K_x を用いて H_x を書き直すと、

$$H_x = \frac{S_p L_r I_x}{S_p L_y I_r + S_p(1-C_y)L_r - (C_p + I_p)L_r + I_r L_p}$$

となり、I_x が大きくなると H_x が大きくなることがわかる。

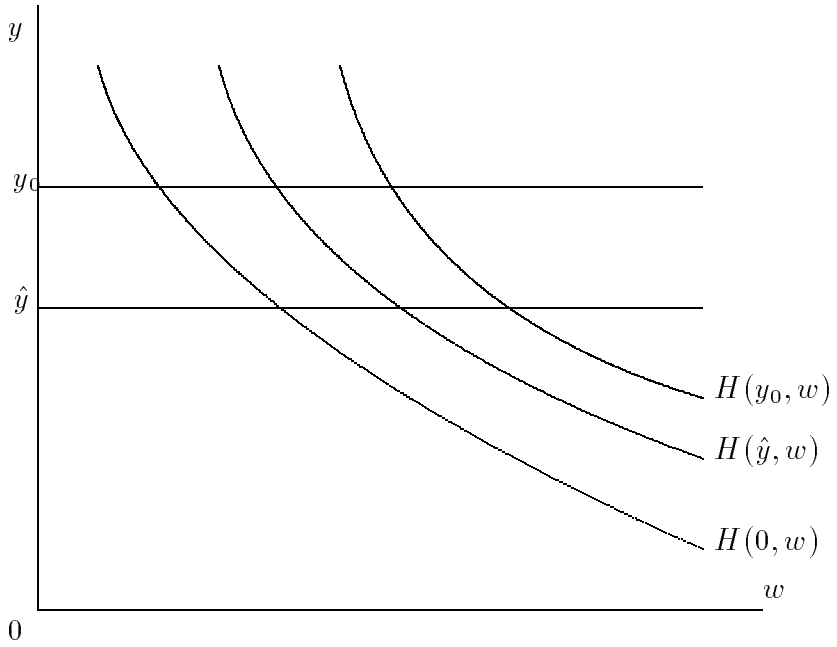

図 4.5: $H(x, w)$ の形状

4.3.3 動学体系 :長期均衡の安定性と循環

ここで、動学体系をまとめておこう。

$$\begin{cases} \dot{w} = \varphi\left(H(x, w)\right) \\ \\ \dot{x} = \theta\left(H(x, w) - x\right) \end{cases} \tag{4.21}$$

この体系の長期均衡は

$$y^* = \hat{y} = x^* \tag{4.22}$$

で与えられる。また、これまでの仮定の下では長期均衡は一意に存在する。以下、この長期均衡の近傍での体系の安定性を調べる。もし不安定なら極限閉軌道が存在する可能性がさて、(4.21) を長期均衡の近傍で線形化すると、

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(\hat{y})H_w & \varphi'(\hat{y})H_x \\ \theta H_w & \theta(H_x - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w - w^* \\ x - x^* \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

ここで、各偏微分の値は長期均衡点 (x^*, w^*) で評価したものとする。

長期均衡点の安定性は、上の線形微分方程式体系の係数行列のトレース

$$T = \varphi'(\hat{y})H_w + \theta(H_x - 1)$$

と行列式

$$\Delta = -\theta\varphi'(\hat{y})H_w$$

を用いて書かれる特性方程式

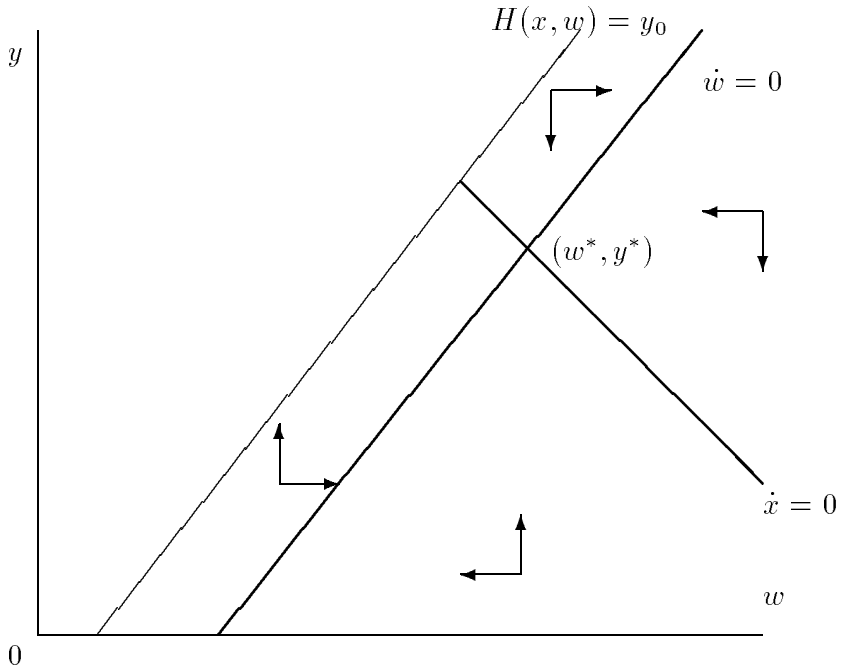

図 4.6: 安定長期均衡

$$\rho^2 - T\rho + \Delta = 0 \tag{4.24}$$

の根に依存する。Δはこれまでの仮定から正であることがわかる。問題はトレースTである。これが負のとき二根は負の実部を持つ。よってこのとき、体系は局所的に安定である。これに対して、Tが正のとき二根は正の実部を持つ。

$$\theta(H_x - 1) > -\varphi'(\hat{y})H_w \tag{4.25}$$

がその条件である。よってこのとき局所的に不安定である。このことは、加速度因子I_xやH_xが大きいときに起こる。

後者の時に極限閉軌道が存在し得る。

図は安定長期均衡と不安定長期均衡に対応する、典型的な二つの位相図である。

$$\begin{aligned} \dot{w} &= 0 \Longleftrightarrow H(x,w) = \hat{y} \\ \dot{x} &= 0 \Longleftrightarrow H(x,w) = x \end{aligned}$$

であるから、曲線$\dot{w} = 0$はどちらの場合でも正の傾きを持つ。他方、曲線$\dot{x} = 0$は$H_x > 1$か$H_x < 1$にしたがって、正か負の傾きを持つ。(4.25)において右辺は正であるから、$H_x > 1$は不安定であることの必要条件であることがわかる。結局、不安定な長期均衡点(w^*, x^*)では、曲線$\dot{x} = 0$と曲線$\dot{w} = 0$はともに正の傾きで交わる。なお、$H(x,w)$は正であるからw軸より上にある。

循環について次の命題が成立する。

命題 **3** 長期均衡が不安定ならば、ベナシーの体系は極限閉軌道を持つ。

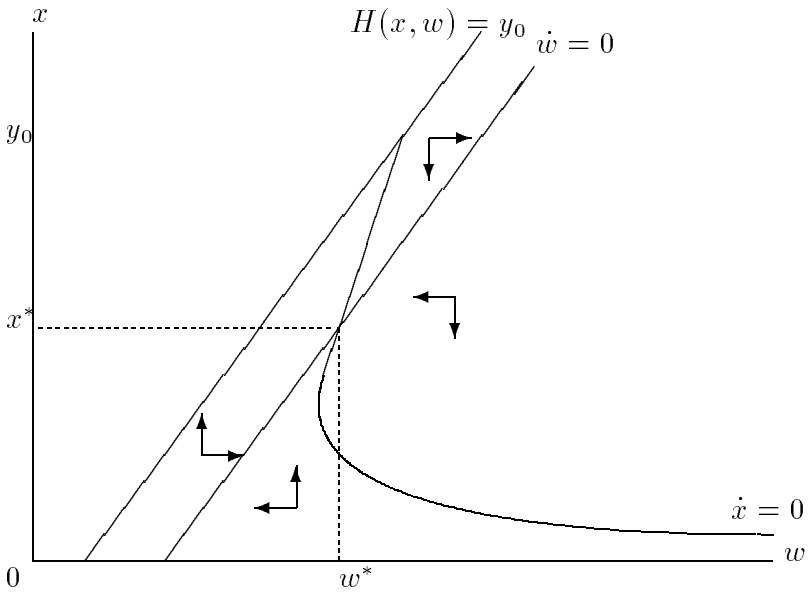

図 4.7: 不安定長期均衡

[証明の概略] 前節で示したポアンカレ＝ベンディクソンの定理を適用するには、コンパクトな不変集合を示せばよい。

まずコンパクト集合の縁を定めよう。

1. 直線$x = y_0$
2. 直線$x = 0$
3. $H(y_0, w_m) < \hat{y}$が成立するようなw_mに対する、直線$w = w_m$
4. $\varphi(y_m) > -\frac{\theta y_0 H_x}{H_w}$が成立する$y_m$に対する、曲線$H(x,w) = y_m$

上二つの直線は問題なく存在する。第三の直線の存在は、$H(y_0, w_m) < \hat{y}$が成立するようなw_mの存在に依存する。しかし、曲線$\dot{w} = 0$と直線$x = y_0$の交点では、$H(y_0, w) = \hat{y}$が成立する。このwより$\varepsilon > 0$大きい$w_m = w + \varepsilon$をとると、$H_w < 0$であることから$H(y_0, w_m) < \hat{y}$が成立することがわかる。第四の曲線については、yがy_0に近づくとき$\varphi(y)$は無限に発散するので、こうしたy_mをとることができる。

第四の縁以外の各点での方向ベクトルが領域の内側に向くことは簡単に確認できる。第四の縁で$\dot{y} < 0$を示せれば、縁から出発する点は、曲線$H(x,w) = y_m$よりほんの少し右へシフトした曲線$H(x,w) = y_m - \delta,\ (\delta > 0)$の方へ向いた方向ベクトルをもつ。つまり、曲線$H(x,w) = y_m$の上方へ向かうことはない。

さて、$H(x,w) = y_m$を両辺時間について微分して

$$\begin{aligned} \dot{y} &= H_x \dot{x} + H_w \dot{w} \\ &= \theta(y - x)H_x + \varphi(y)H_x \end{aligned}$$

となる。われわれが不変集合と想定したコンパクト集合は$x \geq 0$かつ$y < y_0$をみたすから、上式の右辺第一項は$\theta(y - x)H_x < \theta y_0 H_x$であるから

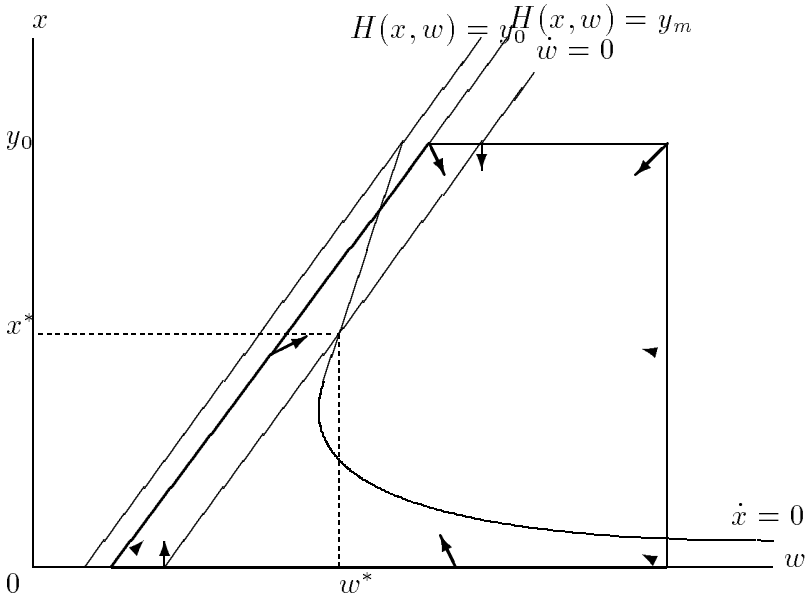

図 4.8: 不変集合

$$\dot{y} < \theta y_0 H_x + \varphi(y) H_w \tag{4.26}$$

である。ところで

$$\varphi(y_m) > -\frac{\theta y_0 H_x}{H_w} \tag{4.27}$$

となるようにy_mを選んだから、

$$\theta y_0 H_x + \varphi(y_m) H_w < 0 \tag{4.28}$$

が第四の縁上で成立する。これで、$\dot{y} < 0$ が示せた。 (おわり)

4.4 グッドウィン (1967) のモデル

国民総生産や消費などの主要な経済時系列を、トレンドを除去した後観察すると、その変動は確かに確率的ショックによって引き起こされたように思えるが、なにかの比率であるような変数によっては内生的景気循環理論が成立しそうなものがある。グッドウィンは、そうした「比率」変数を動学変数とするロトカ = ボルテラ方程式に基づく成長循環模型を示した。[6]グッドウィンの成長し続ける経済の模型では、雇用は固定された資本・産出比率をもつ生産技術のもとで定まるとされ、捕食循環が雇用率と総所得に占める賃金所得の比率の間で生ずる。その循環の過程を簡単に記述すると以下のようになる。好況期を通じての高い実質賃金率は利潤率を圧迫し、投資を徐々に抑える。そして、雇用の成長率が鈍化する。その結果、失業が増加し実質賃金の伸びが抑えられ、利潤が回復し、投資も徐々に上向く。これが、雇用の増加をもたらし再び好況をもたらす、という循環が以下続く。

[6]Goodwin, R. J., "Growth Cycle," in *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Feinstein, C. H., Cambridge University Press, 1967 をみよ。

4.4.1 グッドウィン模型

グッドウィンの模型は以下の変数を使う。[7]

q: 産出量
k: 資本
w: 賃金率
y: 労働生産性
α: 労働生産性の成長率 $(= \frac{\dot{y}}{y})$
l: 雇用
σ: 資本産出比率 (資本の生産性の逆数)
Π: 利潤$(= q - wl)$
u: 労働分配率 $(= w/y)$
n: 労働供給
β: 労働供給の成長率 $(= \frac{\dot{n}}{n})$
v: 雇用率 $(= l/n)$
s_k: 資本家の平均貯蓄性向
s_w: 労働者の平均貯蓄性向
s: 経済全体の平均貯蓄性向
c: 消費
S: 貯蓄 $(= q - c)$

なお、労働供給を人口そのものではなく潜在労働力の供給と考えてもよい。

以下の式 (4.29) から (4.38) までは次に述べる、若干修正されたグッドウィンの仮定から導出される。

- 体化された技術進歩は定常的である。つまり、αは定数。
- 労働供給の成長率は一定。つまり、βは定数。
- 生産要素は、資本と労働のみである。
- 資本と労働はそれぞれ同質的であり、製品差別はない。
- すべての変数は実質表示。
- 労働所得・利潤所得の一定率が貯蓄される。
- 資本産出比率は一定である。つまり、σは定数。
- 減価償却は考慮しない。

[7] ここでのモデルはグッドウィンの本来の模型を若干拡張したものであるが、本質にはいささかの変更もない。

- 実質賃金率の上昇率は完全雇用水準の近傍で、雇用率の増加関数になっている。

最後の仮定はいわゆるフィリップス曲線の存在である。さらに、我々は、資本家の貯蓄率は労働者の貯蓄率よりも大きいと仮定する。つまり、$s_k > s_w$である。[8]

減価償却を無視したため、本来のグッドウィン模型同様、純投資と粗投資の区別はない。そこで、財市場の均衡条件は以下のように書かれる。

$$S = \dot{k}. \tag{4.29}$$

消費は以下の方程式に従うものとする。

$$c = (1 - s)q \tag{4.30}$$

これは、実質残高効果がない場合の消費関数にほかならない。式 (4.29) と (4.30) から

$$\frac{s}{\sigma} = \frac{\dot{k}}{k}. \tag{4.31}$$

を得る。

他方、資本産出比率σが一定であることから、次の方程式が導かれる。

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{q}}{q}. \tag{4.32}$$

また、$\frac{\dot{q}}{q} - \frac{\dot{l}}{l} = \alpha$と$\frac{\dot{l}}{l} - \beta = \frac{\dot{v}}{v}$から

$$\frac{\dot{q}}{q} = \alpha + \beta + \frac{\dot{v}}{v}. \tag{4.33}$$

が得られる。貯蓄に関しての仮定から次の方程式が導かれる。

$$sq = s_k \Pi + s_w w l. \tag{4.34}$$

両辺を算出量qで割って、利潤の定義を思い出せば、

$$s = s_k(1 - u) + s_w u. \tag{4.35}$$

が容易に得られる。経済全体の平均貯蓄性向は労働分配率uに依存していることに注意せよ。この点は本来のグッドウィン模型と異なっている。とはいっても、この相違点はグッドウィン模型の動学的特性を変えない。変わるのは、むしろ定常均衡点の性質である。より具体的にいうと、この論文での定常均衡点は労働者と資本家の貯蓄性向に依存するが、本来の模型では定常均衡点は貯蓄性向から独立になっている。

式 (4.31) と (4.32)、(4.33)、(4.35) からロトカ = ボルテラ方程式体系のうち一本を得る。

[8] 労働者の貯蓄率s_wをゼロとすると本来のグッドウィンの模型になる。

$$\frac{\dot{v}}{v} = \left\{ \frac{1}{\sigma} s_k - (\alpha + \beta) \right\} - \frac{s_k - s_w}{\sigma} u \tag{4.36}$$

以下のようにフィリップス曲線の線形近似を考える。この線形近似はグッドウィン模型の動学特性を変化させない。

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v. \tag{4.37}$$

さて、労働分配率の定義を考慮すれば、方程式 (4.37) はロトカ = ボルテラ方程式系のもう一本の式が得られる。

$$\frac{\dot{u}}{u} = -(\gamma + \alpha) + \rho v. \tag{4.38}$$

方程式 (4.36) と (4.38) は 、よく知られたロトカ = ボルテラ力学系を形成する。これ以降、この体系について調べてみる。u も v も共に経済学的にはゼロと 1 の間になければならないから、体系の位相図を考える場合、われわれは非負象限に関心を集中する。[9]非負象限は不変集合であることに注意せよ。[10]まず、動学体系の定常均衡点を計算する。[11]

$$(v^*, u^*) = \left(\frac{\alpha + \gamma}{\rho},\ \frac{s_k}{s_k - s_w} - (\alpha + \beta) \frac{\sigma}{s_k - s_w} \right). \tag{4.39}$$

定常均衡点が正方領域 $(0,\ 0)^2$ に存在するためには、

$$s_k > \sigma(\alpha + \beta) > s_w$$

と

$$\alpha + \gamma < \rho$$

を仮定しなくてはならない。4.4.1節と4.4.2節でもこの仮定を堅持する。

方程式 (4.39) は労働者と資本家の平均貯蓄性向の差が小さければ小さいほど、均衡点での労働分配率が大きいことを示唆する。これに対して、われわれの模型の特殊な場合である元々のグッドウィン模型では、定常均衡点での労働分配率は、平均貯蓄性向から独立になっているように見える。[12]

---

[9] あとで見るように、グッドウィン模型では、いかなる大きさの振幅の循環も存在しうる。よって、定常均衡点の各座標値がゼロと 1 の間にある限り、労働分配率 u、雇用率 v ともにゼロと 1 の間にあり続けるような循環の存在が保証される。

[10] 位相図のある領域が不変集合であるとは、そこから出発するいかなる経路もその領域からはずれることがないことをいう。

[11] ここで、われわれは、自明な定常均衡点 $(0,\ 0)$ を無視する。

[12] 元々のグッドウィン模型では、資本家は利潤のすべてを投資に廻すと仮定されているため、見た目上、定常均衡点が平均貯蓄性向から独立に見えているにすぎない。実際、$s_w = 0$、$s_k = 1$ とすることで、グッドウィンと同じ結論が得られる。

最後に定常均衡点の比較静学上の性質をまとめておこう。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^*}{\partial s_k} &= \frac{\sigma(\alpha+\beta)-s_w}{(s_k-s_w)^2} > 0 \\
\frac{\partial u^*}{\partial s_w} &= \frac{s_k-\sigma(\alpha+\beta)}{(s_k-s_w)^2} > 0 \\
\frac{\partial u^*}{\partial \sigma} &= -\frac{\alpha+\beta}{s_k-s_w} < 0 \\
\frac{\partial u^*}{\partial \alpha} &= \frac{\partial u^*}{\partial \beta} = -\frac{\sigma}{s_k-s_w} < 0 \\
\frac{\partial v^*}{\partial \alpha} &= \frac{\partial v^*}{\partial \gamma} = \frac{1}{\rho} > 0 \\
\frac{\partial v^*}{\partial \rho} &= -\frac{\alpha+\gamma}{\rho^2} < 0
\end{aligned} \tag{4.40}$$

興味深いことに、資本家の平均貯蓄性向s_kの増加はつねに資本家の所得の取り分を減らすのに対して、労働者の平均貯蓄性向s_wは常に労働分配率を引き上げる。また、われわれの成長経済の模型では、労働生産性の成長率αと人口の成長率βの増加は、ともに所得分配における労働者の立場を悪化させる。労働生産性の上昇は、定常均衡点での雇用率を改善する。また、フィリップス曲線の傾きが急になると雇用率は悪化する。

4.4.2 閉軌道

この節では、前節で示した模型の動学的特性を調べる。このため、まず位相図を描いてみる。すでに前節で示したように、この体系はふたつの定常均衡点を持つ。一つは原点、もう一つは非負象限の内点である。非負象限はこの体系の不変集合であるから、われわれはこの領域に関心を限定する。まず始めに、前節の動学体系を考慮して、非負象限を以下のように四つの部分に分割する。

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{(v,u)\in\Re^2_{++}| \quad u<\frac{s_k}{s_k-s_w}-(\alpha+\beta)\frac{\sigma}{s_k-s_w} \quad \text{and} \quad v<\frac{\alpha+\gamma}{\rho}\right\} \\
A_2 &= \left\{(v,u)\in\Re^2_{++}| \quad u<\frac{s_k}{s_k-s_w}-(\alpha+\beta)\frac{\sigma}{s_k-s_w} \quad \text{and} \quad v>\frac{\alpha+\gamma}{\rho}\right\} \\
A_3 &= \left\{(v,u)\in\Re^2_{++}| \quad u>\frac{s_k}{s_k-s_w}-(\alpha+\beta)\frac{\sigma}{s_k-s_w} \quad \text{and} \quad v>\frac{\alpha+\gamma}{\rho}\right\} \\
A_4 &= \left\{(v,u)\in\Re^2_{++}| \quad u>\frac{s_k}{s_k-s_w}-(\alpha+\beta)\frac{\sigma}{s_k-s_w} \quad \text{and} \quad v<\frac{\alpha+\gamma}{\rho}\right\}
\end{aligned}$$

図 1 にこの位相図を示す。 正象限に留まる動学経路は、A_1, A_2, A_3, A_4, A_1 の順にこの四つの領域を訪れる。グッドウィン模型の位相図上のこの特性を次のように表現することができよう。まず、好況期の高い実質賃金率は利潤を圧迫し、ひいては投資を抑える。次に、雇用率の増加が鈍る。その結果、不況期に突入し、失業が徐々に増加し実質賃金率の下落を

招く。これにより、利潤率が改善し、投資も再び盛んになる。同時に雇用の状況も改善し、好況期に入る。そして、以上の過程を繰り返す。

位相図において、一方の定常均衡点である原点は、グッドウィンの動学体系において鞍点になっている。より具体的に言うと、vの任意の点から出発する経路はv軸にとどまりつつ原点から離れてゆき、他方u軸の任意の点から出発する経路はu軸にとどまりつつ原点に近づく。このことは、グッドウィン動学体系、(4.36)〜(4.38)のヤコビ行列を原点で評価したとき、

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma}s_k - (\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & -(\alpha+\gamma) \end{pmatrix}$$

となることからも容易にわかる。実際、前の節で設けた仮定により、この行列から生成される特性方程式の根は、$\frac{1}{\sigma}s_k - (\alpha+\beta)$と$-(\alpha+\gamma)$であり、それぞれ正と負の実数である。結局、原点でないほうの定常均衡点が正象限に入るための条件は、原点が鞍点になるための条件でもある。

他方、正象限にあるほうの定常均衡点で評価した体系のヤコビ行列は、

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{(\alpha+\gamma)(s_k-s_w)}{\rho\sigma} \\ \frac{-\rho\sigma(\alpha+\beta)+s_k\rho}{s_k-s_w} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。定常均衡点が正象限に存在するように設けた仮定を再び考慮すると、$(1,\ 2)$要素は負、$(2,\ 1)$要素は正となる。よって、線形化された体系において正象限にある定常均衡点は渦心点となるが、元々の体系は非線形力学系なのでこの場合の定常均衡点の性質を即断することはできない。そこで、定常均衡点の動学的性質を調べるため別の手だてを考えなくてはならない。

方程式(4.36)と(4.38)からなる、グッドウィンの体系は幸いなことに次のような第一積分を持つ。[13]

$$H(v,u) = v^{\alpha+\gamma}e^{-\rho v}u^{\frac{1}{\sigma}s_k-(\alpha+\beta)}e^{-\frac{s_k-s_w}{\sigma}u} = g(v)h(u) \tag{4.41}$$

$$g'(v) = e^{-\rho v}v^{\alpha+\gamma}\left(\frac{\alpha+\gamma}{v} - \rho\right)$$

かつ

$$h'(u) = e^{-\frac{s_k-s_w}{\sigma}u}u^{\frac{1}{\sigma}s_k-(\alpha+\gamma)}\left(\frac{\frac{1}{\sigma}s_k-(\alpha+\gamma)}{u} - \frac{s_k-s_w}{\sigma}\right)$$

であるから、関数$g(v)$と関数$h(u)$は同じような形状の関数になっている。実際、各関数は正の実数半直線$\Re_{++}$上においてv、vが定常均衡点の値をとるとき一意な正の最大値をとる。よって、関数$H(v,u)$の等高線は定常均衡点を囲む閉曲線群となる。これで、グッドウィンの体系の解経路が定常均衡点を囲む閉軌道(の群)からなることがわかった。[14]

[13]第一積分とは位相図において、各解経路上で一定になるような関数のことをいう。

[14]ここで得られた閉軌道は決して極限閉軌道にはならない。というのも、リャプノフ関数$log(H(v^*,v^*)) - log(H(v,u))$が任意の開集合で一定にならないからである。この議論についてはHirsch, M. W. and Smale S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974の12章をみよ。

命題 4 (グッドウィン) *(4.36)* と *(4.38)* からなる系の解は、

$$s_k > \sigma(\alpha + \beta) > s_w$$

と

$$\alpha + \gamma < \rho$$

が満たされるとき、正象限上で定常均衡点を除いて閉軌道群として特徴づけられる。

関数 $g(v)$ と関数 $h(u)$ は、ともに最大点を境にして非対称であるため、解曲線である閉軌道は、 定常均衡点の近傍ではほとんど楕円に近い形状をもつが、正確には楕円ではなく大きめの循環の場合には上昇過程と下降過程で非対称になる可能性がある。もっとも、極端な場合でも１０パーセント内外である現実的な変動ではそうした循環経路の非対称性が生ずることはほとんどないと思われる。

尚、上の命題は、定常均衡点が経済学的に意味のある解、つまり v^* も u^* もともにゼロと１の間にあるとき、それ自体がゼロと１の間にとどまり続けるような意味のある循環の存在も保証していることに注意せよ。

4.5 カオス理論の経済変動への応用

ここ 15 年ほどの間、数学において非線形力学の研究が急速に進歩した。カオス理論やフラクタル理論 ・ソリトンの理論が代表的なものである。こうした新しい数学理論を応用した経済変動の理論が最近数多く発表されている。以下、それらのうちいくつかを紹介する。ただし、多くのものは評価が定まっているとはいえない。[15]

4.5.1 リー = ヨークの定理

この節では、カオス理論の基礎であるリー = ヨークの定理の解説をする。

リーとヨークは、区間 $[0,\ 1]$ で連続な関数 f に対して

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (x_0 : \text{初期値}) \tag{4.42}$$

という非線形差分方程式 (離散力学系) を考えた。[16]

リー = ヨークの定理の説明をする前に k 周期点を定義しておこう。

定義 3 $p \in [0,\ 1]$ が f の k 周期点とは、

1. p が $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k\text{回}}(x) = f^k(x)$ の不動点であり、$(f^k(p) = p)$ かつ

[15] グランドモンの研究はその例外であろう。

[16] Li, T. Y. and York, J. A., "Period Three inplies Chaos," *American Mathematical Monthly*, **82**, 1975, pp.985-992

2. $1 \leq \ell < k$であるℓについて、pが$f^{\ell}(x)$の不動点にならない$(f^{\ell}(p) \neq p)$

ことをいう。

定理 5 (リー＝ヨーク) (4.42)が拡大３周期条件と呼ばれる次の条件を満たすとする。区間$[0,\ 1]$に属するa, b, c, dに対して

$$\begin{aligned} f(a) &= b,\ f(b) = c,\ f(c) = d \\ d &\leq a < b < c \end{aligned} \tag{4.43}$$

このとき、(4.42)は次の３性質を持つ。

1. *(4.42)*はすべての自然数kについてk周期点を持つ。
2. Sという非可算集合が区間$[0,\ 1]$に存在して、$p,\ q \in S$に対して$|f^n(p) - f^n(q)|$の集積点で正となるものもゼロになるものもある。
3. pをSの任意の点、qをfのk周期点として、$f^n(p) - f^n(q)$は$n \to \infty$のとき0に収束しない。

注意 12 定理の第二の結論は、拡大３周期条件が成立するとき、解の経路は初期点について連続とは限らないことを示す。しかも、そのようなことが起こることが稀ではないことを、Sが非可算集合であるで示している。

定理の第３の結論は、S上の点pを初期値とする*(4.42)*の解経路はどのような周期点にもまきつかないことを示唆する。(カオス (混沌) の存在 ！)

注意 13 定理の第１の結論は、他の二つとことなりそれほどの困難なく証明することができる。興味がある読者は、他の参考書をみよ。[17]

4.5.2 シュヴァルツ微分

前の節で述べた、リー＝ヨークの定理はカオスらしい挙動が珍しいものではないことを示唆するが、それが安定な軌道に巻き付いていくという通常のパターンと比較してどうであるかについては何も答えない。ここでは、離散力学系がどんなときに安定な軌道を持つか (あるいは持たないか) を、もうすこし詳しく見てみよう。

まず、シュヴァルツ微分と呼ばれるものをを次のように定義する。

定義 4 ３階連続微分な関数fを考える。$f' \neq 0$であるような点xに対して、

$$f^S(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f'''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

をfのシュヴァルツ微分とよぶ。

[17]山口昌哉 『カオスとフラクタル入門』放送大学教育振興会の８章がわかりやすい。

注意 **14** シュヴァルツ微分は合成に関して、符号が不変である。つまり$f^S(x) < 0$のとき、fをn回合成したもののシュヴァルツ微分に関しても、$f^{(n)S}(x) < 0$となる。

定理 **6** 区間$I = [0, b],\ b > 0$で定義される実数値関数fが

1. fは三階連続微分可能
2. ある$c \in I$が存在して、cより小さいxについて$f'(x) > 0$、cより大きいxについて$f'(x) > 0$、$f'(c) = 0$
3. $f(0) = 0$かつ$f'(0) > 1$
4. $x \neq c$に対して、$f^S(x) \leq 0$

であるとき、$x_{t+1} = f(x_t)$は区間I上で高々一つの安定な周期解を持つ。

注意 **15** 上の四条件を満たす関数fを$S-$単峰という。

演習 **1** ロジスティック力学系

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t), \quad x_t \in [0,\ 1],\ \mu \in [0,\ 4]$$

を考え、シュヴァルツ微分を計算し、上の定理を適用したとき何がわかるか。

注意 **16** 上の定理は、安定な周期解の存在を保証しない。

次のふたつの定理も有用である。

定理 **7** fが安定な周期解を持つとき、$f'(x) = 0$を満たす点、つまり臨界点cは安定な周期解に収束していく。

定理 **8** fが$S-$単峰であり、周期kの安定な周期解をもつとき、その周期解に巻き付かないような初期点の集合はルベーグ測度ゼロである。

4.5.3 デイのモデル

デイは、伝統的なIS-LM理論の範囲で、カオス的変動を引き起こすような離散的動学モデルを考えた。[18]

以下、Y_tは産出量、C_tは消費、I_tは投資、K_tは資本ストック、S_tは貯蓄、L_tは雇用量、$s,\ (0 < s < 1)$は貯蓄率、$n > 0$は人工成長率とする。簡単化のためデイは次の仮定を置く。

[18] Day, R., "Irregular Growth Cycles," *American Economic Review*, **72**, 1982, pp.406-414をみよ。

仮定 17 資本は一期間で減価し尽くす。形式的には

$$K_{t+1} = I_t$$

と書かれる。

生産関数$F(K_t, L_t)$については、

仮定 18 *1.* $F(K_t, L_t)$は一次同次

2. 各要素の限界生産力は逓減

という仮定を設ける。

体系の方程式は、

$$\begin{cases} Y_t = C_t + I_t \\ K_{t+1} = I_t \\ S_t = Y_t - C_t = sY_t \\ Y_t = F(K_t, L_t) \\ L_t = (1+n)^t L_0,\ L_0 > 0 \end{cases} \tag{4.44}$$

ここで、貯蓄と投資の均等式の両辺をL_tで割って、

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = \frac{sF(K_t, L_t)}{L_t} \tag{4.45}$$

を得る。

$$k_t := \frac{K_t}{L_t} \tag{4.46}$$

$$f(k_t) := F(k_t,\ 1) \tag{4.47}$$

と定義すると、上の式は$1 + n = \frac{L_{t+1}}{L_t}$を考慮して、

$$k_{t+1}(1+n) = sf(k_t) \tag{4.48}$$

が得られる。[19]

定常状態で一人あたり資本ストックは、(4.48)から、

$$k^* = \frac{sf(k^*)}{1+n} \tag{4.49}$$

と計算される。

デイはここでやや不自然な仮定を置く。つまり生産活動には公害などの拡張に対する阻害要因が働くとして、

[19] これは、ソロウの新古典派成長理論の微分方程式の差分化と考えられる。Solow, R., "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quaterly Journal of Economics*, **70**, 1956, pp.65-94を見よ。

$$y_t := \frac{Y_t}{L_t} = f(k_t) = Bk_t^{\beta}(m - k_t)^{\gamma} \tag{4.50}$$

という生産関数を考える。ただし、m は定数。この生産関数は、

$$f'(k) = B\left(k^{\beta-1}(m-k)^{\gamma-1}\right)(\beta m - (\beta+\gamma)k) \tag{4.51}$$

であり、$k_c = \frac{\beta m}{\beta+\gamma}$ で最大をとる。

単位を適当にとることで、一般性を失うことなく

$$\beta = \gamma = m = 1 \tag{4.52}$$

とおいてよかろう。このとき (4.48) は

$$k_{t+1} = \frac{sB}{1+n}k_t(1-k_t) \tag{4.53}$$

となる、これは$\mu = \frac{sB}{1+n}$とおくとμをパラメターとする離散ロジスティック体系である。すでに見たように生産関数の最大点 k_cを変化させるパラメターはβとγ、m であるから、$\mu = \frac{sB}{1+n}$ の変化は逆 U 字型の (4.53) を縦方向のみに変化させる。このμが約 3.57 以上で 4 を越えないとき、カオス的変動が起こることが知られている。

注意 **17** μが3.57 以上で 4 を越えないとき、図のように

$$\begin{aligned} 0 &\leq k_b < k_c < k_m \text{ かつ} \\ f(k_b) &= k_c,\ f(k_c) = k_m,\ f(k_m) = 0 \end{aligned}$$

となり、リー = ヨークの定理の拡大 3 周期条件が満たされる。

注意 **18** なお、デイが考える状況は、$f(k_c) = k_m,\ f(k_m) = 0$ であるから、定理 7 から、安定な周期解がないことになる。

演習 **2** デイのモデルの一般型に対してシュヴァルツ微分を計算してみよ。また、定理 8 の適用可能性を考える。

4.5.4 ストゥツァーのモデル

デイのモデルは不自然さが目だった。これに対して、ストゥツァーは連続型の微分型のモデルの離散化により、カオス的な状況が生ずることを示す。[20]

$$Y = KN^a, \quad K > 0,\ 0 < a < 1 \tag{4.54}$$

を資本ストック水準を固定したときの生産関数とする。また、雇用の成長率は

[20] Stuzer, M., "Chaotic Dynamics and Bifurcation in a Macro-Model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, **2**, 1980, pp.253-76

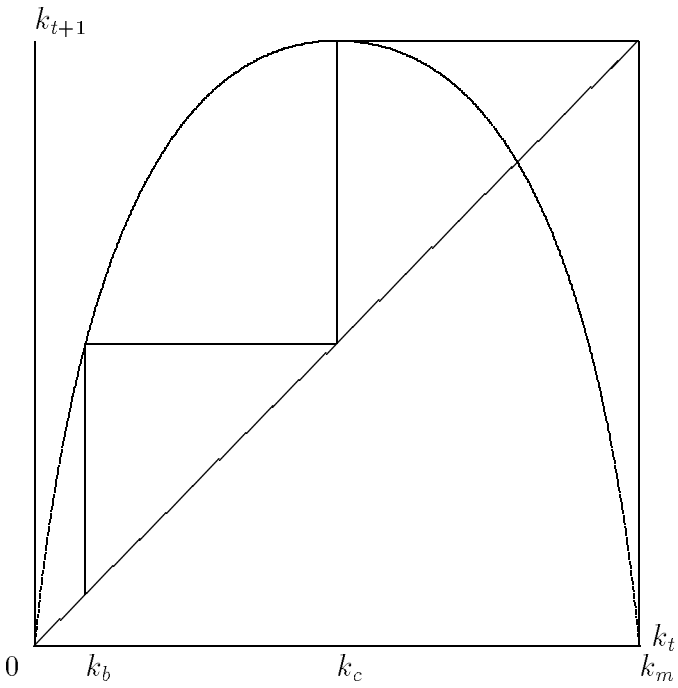

図 4.9: 3 周期条件

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta\frac{N}{Y}, \quad \alpha, \beta > 0 \tag{4.55}$$

と仮定する。つまり、労働生産性の上昇は、雇用の成長率を引き上げる。(4.54) と (4.55) を組み合わせて、

$$\dot{N} = \alpha N - \beta\frac{N^{2-a}}{K} \tag{4.56}$$

という特殊なベルヌーイ型微分方程式になる。[21] この方程式は解くことができて、

$$N = \left(\frac{(KN(0)^{a-1} - \frac{\beta}{\alpha})e^{\alpha(a-1)t} + \frac{\beta}{\alpha}}{K}\right)^{\frac{1}{a-1}} \tag{4.57}$$

となる。また、この一般解は定常点

$$N^* = \left(\frac{\alpha K}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-a}} \tag{4.58}$$

に収束する。

ここで、(4.56) において、$\dot{N}$ を $N_{t+1} - N_t$ で置き換えて離散化を図る。

$$N_{t+1} = (1+\alpha)N_t - \beta\frac{N_t^{2-a}}{K} \tag{4.59}$$

を得る。さらに、

[21] ベルヌーイ型微分方程式は $\dot{x} + g(t)x + f(t)x^{\alpha} = 0$ となるものと考えてよい。

$$N_t = \left(\frac{K(1+\alpha)}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} x_t \tag{4.60}$$

という変数変換から、

$$x_{t+1} = (1+\alpha) x_t (1 - x_t^{1-\alpha}) \tag{4.61}$$

という離散力学系を得る。これは、αの増加にしたがって、上に持ち上げられるfをもつ。また、$f(0) = f(1) = 0$で臨界点を一個もつ山なりの関数である。よって、パラメターの値によっては、カオスが生ずる。

演習 **3** *(4.61)*の右辺をfをとおいて、シュヴァルツ微分を計算し、定理*(4.5.2)*の適用を調べよ。