マクロI(98年度) 講義論ノート

伊藤幹夫

平成11年 1月 20日

Chapter 17

均衡景気循環理論 vs 実景気循環理論

17.1 はじめに

マクロ経済の変動の大部分は、競争経済における確率ショックの動学的波及効果で説明できる。この点を考慮した研究は、最近20年間さかんに行なわれている。そのルーツは戦前まで遡ることができる。実際スルーツキー(消費者行動の比較静学理論で有名)は、すでに１９３０年代に確率ショックで変動がおこるモデルを考えている。また、フリッシュによるショックの波及過程としての経済変動をとらえる研究も、これから述べる理論の先駆ということができる。

ただし、確率ショックの波及過程として景気変動をとらえるとしても、ルーカスやバロー・サージェントらが1970年代に展開した均衡景気循環理論と、1980年代になってそれにとって代わった実景気循環理論は、理論としての性格を異にする。ともに古典派的な均衡状態が確率ショックによって揺さぶられるという経済観は同じだが、変動の源泉について均衡景気循環論者が貨幣市場の変動などの需要側面のショックを重視するのに対して、実景気循環理論者は生産面でのショックなど供給側面のショックを重視する。また、前者が、ルーカス型供給関数を中心に据えて、貨幣需給条件にショックを導入したマクロ経済理論であるのに対して、後者は最適成長モデルあるいは世代重複モデルにおいて生産ショックを導入した経済理論になっている。またふたつの理論の含意も異なる。この章ではふたつの理論をそれぞれ簡単に説明し、含意の違いをみる。[1]

17.2 均衡景気循環理論

均衡景気循環理論は、古典派的なマクロ経済モデルにおいて、貨幣市場に確率的・外生的なショックを導入したものとして特徴づけられる。これは、かなり形式的な特徴づけで

[1] 均衡景気循環理論の代表的論文として、Lucas, R.E., "An Equilibrium Model of the Business Cycle," *Journal of Political Economy*, **83**, 1975, pp.1113-1144が、実景気循環理論の先駆的な論文としてLong, J. and C. Plosser, "Real Business Cycles," *Journal of Political Economy*, **91**, 1983, pp.39-69があげられる。

あるが、その理論の含意を反映する。

実際、ショックが存在しないと仮定すると、この種のモデルは大抵フリードマンのいう自然失業率に対応する産出水準に落ち着くように構築されている。つまり、そうした均衡産出水準からの絶えざる乖離は、外からのショック、特に貨幣市場でのショックを反映するものだと考えられる。このことは、均衡景気循環理論が需要ショックモデルと考えてよいことを示唆する。ただし、総需要・総供給の文脈で、需要曲線のみがショックにさらされると考えてしまうのは正しくない。

以下、簡単なモデルで均衡景気循環理論の枠組みを説明しよう。登場する変数はすべて対数変換されたものとする。また、$E_{t-1}p_t$のような変数は、$t-1$時点に形成される、変数p_tの合理的期待である。

$$\begin{aligned} m_t - p_t &= y_t - V \quad &(17.1)\\ y_t - y^* &= \beta(p_t - E_{t-1}p_t) \quad &(17.2)\\ m_t &= \alpha y_{t-1} + u_t \quad &(17.3) \end{aligned}$$

m_t、p_t、y_tはt期の名目貨幣残高、物価、実質産出量をそれぞれ表す。y^*は完全雇用における産出量で定数とする。Vは貨幣の流通速度で定数、α、βはパラメターで、これらは正の定数とする。u_tは撹乱項である。

(17.1) は貨幣数量方程式、(17.2) はルーカス型供給関数であり、今期の価格が前期に形成された価格の予想を上回るとき、今期の産出が完全雇用時の産出量を上回るとする。(17.3) は政府の貨幣供給ルールで、前期の産出に比例する部分と撹乱項からなる。

上の体系で、m_tを消去しp_tとy_tについて整理すれば、

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{1}{1+\beta}(\alpha y_{t-1} - y^* + \beta E_{t-1}[p_t] + V + u_t) \quad &(17.4)\\ y_t &= \frac{1}{1+\beta}(\alpha\beta y_{t-1} + y^* - \beta E_{t-1}[p_t] + \beta V + \beta u_t) \quad &(17.5) \end{aligned}$$

を得る。以上のモデルをモデル１とよぶ。

なお(17.1) を貨幣需要方程式とみて、これにケーガンのモデルのようなインフレ要因を導入し、貨幣供給ルールをやや単純化して次のような体系を考えることもできる。

$$\begin{aligned} m_t - p_t &= y_t - \gamma(E_{t-1}[p_{t+1}] - E_{t-1}[p_t]) \quad &(17.6)\\ y_t - y^* &= \frac{1}{\delta}(p_t - E_{t-1}p_t) \quad &(17.7)\\ m_t &= \bar{y} + u_t \quad &(17.8) \end{aligned}$$

m_t、p_t、y_t、y^*は上と同様。γ、δはパラメターで、これらは正の定数とする。u_tは撹乱項である。$\bar{y}$は定数とする。このモデルをモデル２とよぶ。

演習 1 モデル１同様にp_tとy_tについて一般形を求めよ。

合理的期待を含むモデルを解く方法、つまり内生変数をパラメターと撹乱項の関数と表現する方法に決定版はない。これは、合理的期待モデルの解が一意になるとは限らず、解法によって異なる解を導出してしまう可能性があるためである。

モデル１を例にとって合理的期待モデルの解法を考える。
条件付期待値が予測子として線形になる事を保証するために、次の仮定を置く。

仮定 1 撹乱項は系列相関のない平均０、分散σ^2のガウス過程に従う。つまり、
(i) $(\forall t \forall j \neq t) \quad E[u_t u_{t-j}] = 0$
(ii) $(\forall t) \quad u_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$

この仮定と体系の線形性が以下の解法が正しいことを保証する。
ルーカス供給関数モデル１の場合、内生変数が将来の予想値に依存しないため比較的簡単に扱うことができる。つまり、大体以下のような手続きを踏んで解を求める。

1. モデル内の予想値（将来変数の予想値ではないとする）を所与として、内生変数についてモデルを解く。
2. 上で解いた結果に条件付期待値を作用させて、内生変数を消去して、予想値の方程式を得る。
3. 上の方程式の解として、予想値を求める。
4. 予想値を元の体系に代入して、内生変数の解を求める。

それでは、実際に解いてみよう。すでに、第１段階はおわっている。そこで、(17.4) の両辺に条件付期待値$E_{t-1}[\,\cdot\,]$を作用させて、整理すると

$$E_{t-1}[p_t] = \alpha y_{t-1} - y^* + V \tag{17.9}$$

を得る。（第３段階終わり）この式を(17.5) に代入して、

$$y_t = y^* + \frac{\beta}{1+\beta} u_t \tag{17.10}$$

というy_tについての解が得られる。これを、(17.9) や(17.3)、(17.5) と連立させて最終的な解、

$$m_t = \alpha y^* + u_t + \frac{\alpha\beta}{1+\beta} u_{t-1} \tag{17.11}$$

$$p_t = -(1-\alpha) y^* + V + \frac{1}{1+\beta} u_t + \frac{\alpha\beta}{1+\beta} u_{t-1} \tag{17.12}$$

が計算される。

注意 2 時系列解析で考えると、(17.11) と (17.12) は、u_tが白色雑音であるとき、一階の移動平均過程(MA(1)) に従う。

演習 2 y_t, p_t, m_tの分散を求めよ。次いで、それら分散がαとβの増加に従って、増加するか減少するかをそれぞれ確かめよ。

さて、解の形から明らかなように、各変数とも現在および過去の有限期間の攪乱項から影響を受ける。モデルを変更して、解が現在および過去の無限期間の攪乱項の影響を受けることになっても、この種のモデルでは、過去に遡った攪乱項の影響は無視し得るものになる。よって、貨幣市場でのショックの影響はどんなに大きくとも一時的なものに留まる。この点は次に述べる実景気循環理論と、含意がまったく異なる。

17.3 実景気循環理論

ルーカスの誤認によるマクロ経済理論は、景気変動の理論としてみるとき様々な問題点をもつ。ひとつは、経済についての情報の不完全性が、経済変動の主因であるという見方そのものである。そうした情報の不完全性による誤認ということ自体、合理的期待というルーカスが中心に据えたかった考え方となじまないのではないかという批判といってよい。さらに、誤認が存在するということは、別の意味でも古典派的経済観（ワルラス均衡理論に依拠する経済観）と矛盾するのではないかという批判もある。誤認があることは、情報自体に経済的な価値があることになる。つまり、誤認しない経済主体は誤認する主体を出し抜いて利益を得ることが可能であるから、合理的経済主体は情報の提供には積極的に対価を支払う。しかし、ルーカスのモデルでは、情報の売買は行なわれず、利潤機会が残ったまま均衡している。すべての経済財に対して市場が存在して、市場価格が成立し超過利潤が消失する古典派的な均衡概念になじまないというわけである。

こうした批判のなか、1980 年代になって、ルーカスの誤認モデルに対する経済学者の信頼には翳りが生じた。様々な実証研究の示す結果も、ルーカスの誤認モデルに対して否定的なものが増えた。そこで、古典派的経済観を信奉する経済学者は、経済主体が誤認をしなくても、何らかの外生的ショックによって、経済循環に似た産出量の変動をもたらすことを論証する理論を考えだした。これが実景気循環理論である。その理論モデルは、できるだけ忠実にワルラス均衡理論を動学的な枠組みで展開しながら、同時に産出量が変動するような工夫がなされている。以下、実景気循環理論の本質についての説明をし、その後、世代重複モデルによる理論モデルの展開とその解説をおこなう。

17.3.1 実景気循環理論の本質

実景気循環理論は、ワルラス的均衡を時間がある世界で展開し、そこに生産技術に関する外生的ショックを持ち込むことで、産出量の変動を説明するような理論になっている。実景気循環理論のモデルの中の経済主体は、時間の流れのなかで効用を最大化し、利潤を最大にしようとする。また、財市場は各時点で均衡する。市場には取引費用や情報の不完全性などの、ワルラス均衡をさまたげるようなものはないと想定される。よって、変動する産出量や消費量・投資量は、すべてワルラス均衡の産出量や消費量・投資量そのものが観察されているのだと、実景気循環理論を支持する経済学者は考える。

実景気循環理論とルーカスの誤認モデルとの相違点は、すでにふれたように、情報の不完全性その他の原因によって経済主体が誤認するということを、基本的には考えないこと

、さらに、体系を揺り動かす外生的な不規則な衝撃の源泉が、本来物価という名目値の決定にかかわる、貨幣供給に関するショックではなく、実物の生産にかかわる生産技術に関するショックにある、と考える点である。実は、変動の源泉を、名目的なショックではなく実物的なショックであると考えるため、実景気循環理論の名前がある。非常に直観に訴える形でまとめると、ルーカスなどによる均衡景気循環理論が、貨幣供給における予想できないショックという総需要関数をシフトさせる外生的要因に、経済変動の源泉を求めたのに対して、実景気循環理論は生産技術を表わす生産関数をシフトさせ、ひいては総供給関数をシフトさせる、生産技術水準の不規則な変動に、経済変動の源泉を求めた。前者において、貨幣供給に関するショックが本当に総需要関数を動かしてしまうと考えるのは、実は正確ではないが、変動の源泉の性質の違いを理解するためには、分かりやすいだろう。

理論の形式的な部分の展開は、次の小節でおこなう。ここでは、不規則衝撃モデルとの関連を述べる。実景気循環モデルでは、理論の帰結として得られる産出量決定の方程式が、差分方程式に不規則な外力を加えた形式をもつものとして得られる。これにより、経済システムは、不規則な外力を波及させるシステムとして機能することになる。ただし不規則な外力については、前の章とはやや異なる想定を置く。その想定のために、実景気循環理論の含意する産出量の挙動の性質は、現実の産出量の挙動を前節の均衡景気循環理論より現実的なものにする。

17.3.2　実景気循環理論モデルの展開

この節では、簡単な世代重複モデルを使って、消費者や生産者が競争的に行動し、財市場も常に均衡するような状況で、突発的な技術進歩その他の、生産技術についてのショックが起こったとき、産出量や資本ストック量がどのように変動するかを分析する。世代重複モデルとは、時間の流れにそって有限の寿命を持つ主体が世代を重ねて共存するなかで、経済活動をおこなうと考えるモデルである。現実の世界では、引退して年金その他の若いころの蓄えによって生活する人と、働き盛りで現在の所得を現在の消費に向けると同時に、将来への備えとして貯蓄にも幾ばくかを向ける人がいる。世代重複モデルはそうしたことを、モデルに表わしたものである。以下では、２期間を寿命とする主体を想定するが、t 期に誕生した個人は、t 期には若者としてすごし、$t+1$ 期においては老人として、$t+1$ 期に誕生する若者と共存し、期末に死亡すると考える。

このモデルにおいては、簡単化のために、財は労働サービス以外には１種類とし、人口は不変であるとする。さらに、消費者は２期間生存する。消費者は、その生存する２期間のうち前半の若年期にのみ労働を１単位供給し、市場で定まる賃金率にもとづく賃金をうけとる。そうして得た所得のうち一部を今期、つまり若年期の消費にまわし、残りを労働を供給しない、生存後半の老年期のために貯蓄をする。以上の消費者行動は、利子率と賃金率を所与として、（期待）効用を最大にするように、今期と来期の消費量を選ぶという形で定式化される。

消費者の財に対する選好は、次に挙げるのような対数線形型の効用関数を考える。

$$u(C_{1t},\ C_{2t+1}) = ln\ C_{1t} + (1+\theta)^{-1}E[ln\ C_{2t+1}|t] \tag{17.13}$$

ここで、C_{1t}は、t期に生まれた消費者の生存期間前期（若年期）の消費量、C_{2t+1}は、同一主体の次期($t+1$期)の消費量。lnは対数関数を表わす。また、今期の生産において技術ショックが確率変数として扱われているため、消費量も来期については確率変数とみなされる。そのために、上の(17.13)において来期の効用はt期の情報を所与としたときの条件つき期待値として右辺第二項で表わされている。なおθは正の実数で、時間選好率を表わす。つまりこの主体は、θが大きいほど、将来の消費からの満足を低く評価するという選好をもつ。

t期に生まれた主体は、この効用関数を、予算制約

$$C_{1t} + \frac{1}{1+r_t}C_{2t+1} = w_t \tag{17.14}$$

の下で最大化する。ただし、w_tはt期の賃金、r_tはt期の利子率である。労働が１単位つねに供給されることにより、賃金率と賃金所得を区別する必要はない。また、財が１種類しかないことから、上の予算制約において第t時点の財の価格を１とおくと、$t+1$時点の財の価格は利子率を用いて$\frac{1}{1+r_t}$と表わされるため、上のような予算制約式になることに注意しよう。

さて、上の効用最大化より、t期の消費量C_{1t}は、

$$C_{1t} = \frac{1+\theta}{2+\theta}w_t \tag{17.15}$$

となる。第１期の最適消費が賃金w_tに比例し、利子率r_tから独立になっている。また$\frac{1+\theta}{2+\theta}$が$\theta$の増加関数であるから、$\theta$が大きくなって将来の効用を低く評価するほど、今期の消費量が大きく定まるということも、表わす。t期の貯蓄は

$$S_t = w_t - C_{1t} \tag{17.16}$$

であるから、最適な貯蓄は、

$$S_t = \frac{w_t}{2+\theta} \tag{17.17}$$

となり、これも利子率r_tから独立になっている。

なお、個別消費者の労働供給が１単位で固定されており、人口も一定であるから、社会全体としての労働供給も固定されていることに注意しよう。

つぎに財の生産と供給を考えよう。議論の簡単化のため、生産関数としてコブ＝ダグラス型生産関数を考える。つまり

$$Y_t = U_t K_t^a N_t^{1-a} = U_t K_t^a \tag{17.18}$$

という生産関数を考える。Y_tはt期の生産量、K_tはt期の資本、N_tはt期の労働量である。またaはゼロと1の間の定数とする。ここで、二番目の等号は、仮定により個別消費者の労働供給量が１で固定されており、人口が一定という仮定から、社会全体の労働供給量を集計化（平均化）して１と表わした結果である。ここで、U_tは生産性の水準を表し、確率変数であるとする。生産関数が(17.18)のように表わされることは、技術進歩のタイプがヒッ

クス中立になっていることを意味する。つまり、技術ショックの前後で生産関数の等量曲線の限界代替率が変化しないような、生産関数のシフトがおこることを意味する。

さらに簡単化のため、資本K_tは１期で完全に償却されてしまうという幾分非現実的な仮定をおく。これにより、各期の投資量I_tと次期資本ストックK_{t+1}が等しくなると考えられる。つまり

$$I_t = K_{t+1} \tag{17.19}$$

一方、企業の最大化行動により、実質賃金率w_tが労働の限界生産力と等しくなる。よって
、

$$w_t = (1-a)U_t K_t^a \tag{17.20}$$

が成立する。また、資本K_tは１期で完全に償却されてしまうという仮定から得られる(17.19)と、財市場の均衡条件

$$I_t = S_t \tag{17.21}$$

から

$$K_{t+1} = S_t \tag{17.22}$$

が得られる。

式(17.20) と式(17.22) を連立させて確率変数U_tをふくむ差分方程式

$$K_{t+1} = \frac{(1-a)U_t K_t^a}{2+\theta} \tag{17.23}$$

が導かれる。このままでは非線形な形になっていて扱いにくいので、変数を対数変換して、

$$k_t = ln(K_t), \quad y_t = ln(Y_t), \quad u_t = ln(U_t),$$

のように表わすと、

$$k_{t+1} = b + ak_t + u_t \tag{17.24}$$

という定数項と確率変数u_tをふくむ線形の差分方程式が得られる。また、定数項は$b = ln\left(\frac{1-a}{2+\theta}\right)$である。$a$がゼロと１の間の定数であるので、(17.24) は

$$k_t = \frac{b}{1-a} + \sum_{i=0}^{n-1} a^{i-1} u_{n-i} \tag{17.25}$$

という表現ができる。

産出量については、(17.18) を対数変換して、

$$y_t = ak_t + u_t \tag{17.26}$$

これと (17.24) から、生産量についてのu_tをふくむ線形の差分方程式、

$$y_t = ab + ay_{t-1} + u_t \tag{17.27}$$

が得られる。

ここで技術に関する外生的ショックについての性質が、資本ストックや産出量の時間を通じての動きを、大きく左右する。

u_tが白色雑音の場合　u_tを白色雑音とする。これは数学的には、すべてのtに対して、

$$E(u_t) = 0 \tag{17.28}$$

と

$$E(u_t^2) = \sigma^2 \tag{17.29}$$

$t \neq s$となるすべてのtとsの組み合わせに対して

$$E(u_t u_{t-s}) = 0 \tag{17.30}$$

が成立することをいう。ここで、u_tの平均がゼロとすることは、この場合あまり本質的ではない。ゼロの代わりにある定数gをとっても、もともとの生産性に戻したときの平均の水準が、シフトするにすぎないからである。

u_tが白色雑音の場合、(17.27) 式は1階の自己回帰過程とよばれるものになる。これは前の節のルーカスのモデルと実は同じもの考えてよい。よって、どのような挙動を示すかは、図??が示すようになる。y_tの平均については、簡単な計算により

$$E(y_t) = \frac{ab}{1-a} \tag{17.31}$$

が求められる。また分散も

$$E\left[(y_t - E[y_t])^2\right] = \frac{\sigma^2}{1-a} \tag{17.32}$$

と求められる。

白色雑音を仮定すると、ある時点tの技術水準u_tとそれ以外の時点sの技術水準u_sは相関しないから、(17.26) を見てわかるように、技術進歩の効果がその期に限り有効となる。つまり、ある期に起こったショックは長期的には効果を持たない。これは現実的な技術進歩というものの考え方にあわない。というのは、技術進歩を考えるときは、やはり一回導入されると，それ以降は半永久的に利用可能できるように体化されると考えるのが自然であるからである。そこで、次のような場合を考える。

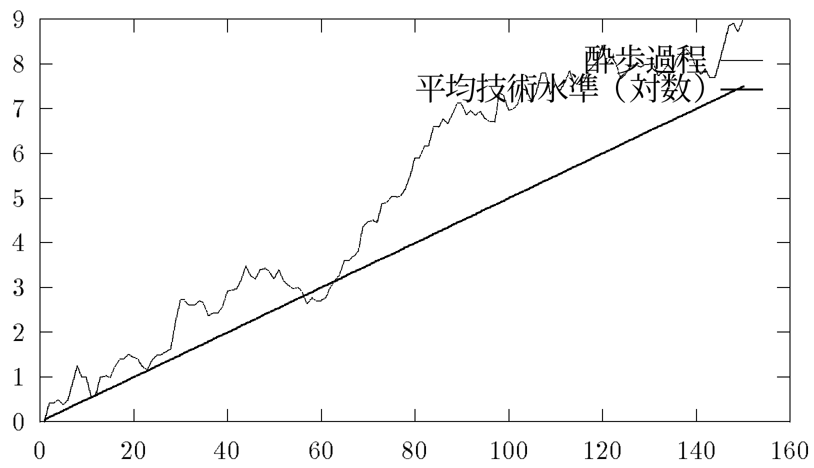
u_tがドリフトつきの酔歩過程の場合　ここで、ドリフトg(これは、生産性の上昇率を表わす) つきの酔歩過程

$$u_t = g + u_{t-1} + \varepsilon_t \tag{17.33}$$

を考える。ただしε_tは白色雑音である。このように考えると、技術水準は平均的に成長率gで進歩し、分散がどんどん大きくなっていく挙動を示す。その挙動の理解を助けるために、図17.1に、直線で表わされる平均技術水準とともに、$g = 0.05$、$\sigma^2 = 0.2$とした場合の標本過程を示した。(17.33) を(17.27) に代入して、$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$を用いて整理すると

$$\Delta y_t = g + a\Delta y_{t_1} + \varepsilon_t \tag{17.34}$$

図 17.1: 技術水準（対数）のシミュレーション



となり、産出量の対数値の階差系列が一階の自己回帰過程になることがわかる。実は、対数値の階差はもともとの変数の成長率を表わす。よって、上の式(17.34) は産出量Y_tの成長率が、一定値の周辺を図??のようにふらつくことを示している。産出量自身は増加するが、その分散は時間を通じて増大するようなやや捉えどころがない動きをすることが知られている。実証研究によれば、現実の産出量の変動は、確定的なトレンドとその周辺をかなり規則的にふらつく図??のようなグラフとは、かなり性質の異なった動きをすることがわかっている。トレンド自身が過去のショックを引きずる確率的なものであるという認識が、1980 年代にはいってからのいろいろな実証研究によって、広まりつつある。そうした点を勘案すると、実景気循環理論は、現実の産出量の変動を説明する有力な理論ということになる。

17.3.3 実景気循環理論の意味

実景気循環理論にもとづくモデルは、前節のルーカスによる均衡景気循環理論のそれと異なり、情報についての誤認といったことを仮定せずに、ワルラス的競争均衡メカニズムの中で、擬循環的な産出量の変動が生ずるモデルになっている。また、技術水準という生産に関する実物的なパラメターの変動が、産出量の変動の原因であり、技術水準の変動がドリフトつき酔歩過程にしたがうと考える場合は、特に現実の産出水準の変動によく似た変動をつくりだす。

しかし、実景気循環理論が現実の産出量の変動を説明する優れた理論かというと、そうであるとは言い切れない。第一に、雇用は産出量が変動するにもかかわらず、一定な値をとりつづける。しかし、現実の産出量の変動と雇用の変動は、たいてい同じ様に上下運動を繰り返す。（これを指して、雇用は順循環的であるとよんだりする。）あきらかに、実景気循環理論の結論はこの事実とは相いれない。この点を修正することを目指した実景気循

環理論も考えられているが、これまで成功したといえるものはない。

さらに、この節で産出量の変動方程式を導出した過程から明らかなように、実景気循環理論によるモデルでは大抵の場合、生産関数や効用関数に対して、かなりの特定化をおこなう。また、資本ストックの減価償却率が100パーセントであるという想定は、かなり非現実的である。これは、普通の意味の資本ストックの存在を否定するからである。以上を考えると、実景気循環理論の結論がどれだけ一般的か、やや疑問が残る。

実景気循環理論は、実物面でのショックが産出量の変動を引き起こすという考え方を基礎にしている。しかし、モデルで定まる均衡は競争均衡であり、そこで定まる産出量は完全雇用均衡産出量であり、誰も自分の意思に反して失業するということがない状態にある。こうしたモデルでは、ルーカスの均衡景気循環理論以上に、政府の役割は過小評価される。なぜなら、ワルラス的競争均衡はパレート最適であるから、実景気循環理論での経済状態は、分配の公正に関する判断をのぞけば、つねに政策的干渉が必要ない状態にあるからである。その意味で、実景気循環理論に有益な政策提言を期待するわけにはいかない。

付論：外生ショックの産出量に対する持続性

17.3.4 序

前の講義で、生産ショック等の体系外の確率ショックが波及する過程としての景気変動を表現する理論モデルの簡単な例をを示した。ここでは、特に確率トレンドを理論に導入するきっかけとなった、ネルソン＝プロッサー以降の実証研究の内容にふれつつ、確率ショック導入のマクロ経済学的意味を考える。

17.3.5 時系列論からの準備：定常性

われわれは、動学的視点からマクロ経済を捉える。よって、確率ショックを扱うといっても問題となるのは、一回限りのショックではなく、時間に連なって継続的に生起する不確実な外生変動である。数学的には、確率変数を時間の添字をつけて列挙したものを確率過程といい、これをもって持続的な不確実な外生変動の表現とする。確率過程は、$\{x_t\}$などと記す。

確率変動には、さまざまな分類が可能だが、もっとも重要な分類基準は定常・非定常の区別である。[2]定常確率過程とは大ざっぱにいうと、過程のどの部分を取り出してみても、取り出し方が同じなら、確率構造が同一になることをいう。（標語：どこを切っても金太郎。）より詳しく説明するため例をあげると、t期から$t+3$期まで4個の確率変数を取り出す一方、$t+40$期から$t+43$期まで4個の確率変数を取り出してみる。このとき、それぞれ4個確率変数の関係は4次元確率分布で特徴づけられるが、定常確率過程なら、それぞれの確率分布が同一になってしまう。勿論、4個とか40とかいう数字はとにかく任意であり、本来なんでもよいことに注意せよ。

[2]ほかにも、エルゴード性、ガウス性、非線形性などの基準がある。

なお、上の定常過程の概念はやや強いので、一般には次に定義する二次モーメントまでについての時間不変性を扱う弱定常の概念を採用することが多い。

定義 1 確率過程$\{x_t\}$が（弱）定常であるとは、

i $\forall t \quad E(x_t) = \mu$（定数）

ii $\forall t \quad Var(x_t) = E(x_t - \mu)^2 = \sigma^2$（定数）

iii $\forall t, s \quad Cov(x_t, x_s) = E((x_t - \mu)(x_s - \mu)) = C_{t-s}$（定数）

であることをいう。

経済データを取り上げ、確率過程の実現値の系列として考えると、定常性が成立しているとは考えにくいデータが多い。これは、定常性の定義に戻って考えると次のことによる。

- 多くの経済データはトレンドを持ち、平均値の一定性は満たされないようにみえる。
- 多くの経済データの変動パターンは振幅、疑似的な周期性、ともに時間に関して一定であるとは見えない。（部分的に変動が激しかったりする）

経済データを確率過程の実現値として見るとき、大きな問題となるのは第一のほうである。データのトレンド構造を見いだし、トレンドを除去し定常な時系列を得ることは、（時系列解析的な手法を用いるときは）実証のための大きなステップである。また、経済の成長の背後にある構造を見きわめる大事な作業でもある。

17.3.6 トレンド定常と階差定常

さて、トレンドもつ経済データ、たとえば実質国民総生産（の対数値）などを考えるとき、そのトレンド特性をどう考えるかは、大きくわけてふたつ存在する。一つは、トレンド定常、もう一つは階差定常である。前者が確率に依存しない一定の直線を考え、データはその回りを定常確率過程に従って変動していると考えるのに対して、後者はトレンド線自体が確率的変動にさらされていて、一定の直線とは考えられないという立場をとる。

ネルソン＝プロッサー(1982)は、アメリカの経済データをこの観点からみると、失業率をのぞいて、大部分のデータが階差定常であるらしいとの結論を得た。具体的には、成長率が一定とはいえず、ランダムウォークに従うという結論である。これは、それまでのマクロ経済学の研究に対して、興味深い挑戦状をつきつけることになった。

具体的には、経済は定常成長経路に沿って成長しており、変動は貨幣的なショックによって引き起こされるもので、定常成長経路の回りを安定的にふらついているにすぎない、という定型化された事実(stylized facts)に疑念を投げかけた。つまり、以前は成長はショックなどから独立に確固とした形で、経済構造によって定まり、変動は財政・金融面での一時的ショックから需要ショックの形で引き起こされるにすぎず、その影響は時間の経過ととも

に減衰すると考えられていた。成長は、ファンダメンタルズに依存し、変動などはファインチューニング的に需要管理によって行なえばいいとされた。[3][4]

さて、トレンド定常と階差定常は、以下のように定義される。

定義 2 確率過程$\{z_t\}$がトレンド定常であるとは、

$$z_t = \alpha + \beta t + c_t$$

$$\phi(L)c_t = \theta(L)u_t; \quad u_t \sim i.i.d.(0, \sigma_u^2)$$

と表現できることである。ここで、Lはラグ作用素、$\phi(L)$, $\theta(L)$はラグ多項式である。

定義 3 確率過程が$\{z_t\}$が階差定常であるとは、

$$(1-L)z_t = \beta + d_t$$

$$\delta(L)d_t = \lambda(L)u_t; \quad u_t \sim i.i.d.(0, \sigma_u^2)$$

直感的には、z_tとして国民総生産などの経済データの対数値と考えると、上のふたつの定義でβは平均成長率と解釈することができる。このとき、トレンド定常は、決定論的な直線トレンドを除去した系列$\{z_t - \beta t\}$が定常なARMA過程で表現されるのに対して、階差定常は成長率$\{(1-L)z_t\}$が定常なARMA過程で表現される。

この定義から導かれる特性を少し考える。まず、階差トレンドの定義式を変形することで（逐次代入による）、

$$z_t = z_0 + \beta t + \sum_{j=1}^{t} d_j$$

となる。ここで、注目するべきはトレンド定常に比較してインターセプト項が存在して歴史的与件に依存し、直線トレンドβtからの乖離$\sum_{j=1}^{t} d_j$が非定常になる点である。これにより、長期予測の分散は階差定常は、予測期数の増加に従い発散する。

17.3.7 単位根検定

一般にARMA表現に現われるラグ多項式のゼロ（ラグ多項式イコールゼロとおいた方程式の根）が1であるときそれを単位根という。単位根は確率過程の典型的な非定常要因である。先ほどの、階差定常かトレンド定常かは、階差モデルが

$$\delta(L)(1-L)\{z_t - \beta t\} = \lambda(L)u_t$$

あるいは、インターセプト項を含んだ

[3]行なっても意味がないという合理的期待派の人達も、成長に関しては同じように考える。

[4]また、新古典派成長論の含意をテストするという意味での研究もノイザー(1991)によっておこなわれており、先進国の経済が定常成長経路にのっているとはいえないという結論が得られている。

$$\delta(L)(1-L)\{z_t-\beta_0-\beta t\}=\lambda(L)u_t$$

と書き直せることから、

$$\delta(L)(1-\rho L)\{z_t-\beta t\}=\lambda(L)u_t$$

あるいは

$$\delta(L)(1-\rho L)\{z_t-\beta_0-\beta t\}=\lambda(L)u_t$$

をデータに当てはめ、ρが1に等しいか、それより小かを統計的に検定することでふたつのモデルのどちらかが妥当するかを調べることができる。

ここでは、MA項$\lambda(L)=1$である場合のみを考える。若干トリッキーな変形により、

$$\Delta z_t=\beta_0' t+\beta'+\alpha_0 z_{t-1}+\alpha_1\Delta z_{t-1}+\cdots+\alpha_k\Delta z_{t-k}+u_t$$

を得る。[5]$\Delta=1-L$は階差作用素であり、$\beta'=\delta(1)(\rho-1)\beta,\ \alpha_0=\delta(1)(\rho-1),\ \delta(1)=1+\sum_{i=1}^{k}\delta_k$である。ただし、$\delta_i$はラグ多項式$\delta(L)$の$L^i$に対応する係数である。[6]帰無仮説を

$$H_0:\ \rho=1$$

とおくと、帰無仮説のもとで

$$\beta'=0,\ \alpha_0=0,\ \alpha_j=-\delta_j\ (j=1,\ldots,k)$$

となることが知られている。

具体的な検定手続きは、データから、階差系列$\{\Delta z_t\}$を計算し、これを定数１、トレンドt、z_{t-1}、$\Delta z_{t-1},\ldots,\Delta z_{t-k}$に回帰し、係数を推定する。その後、$\alpha_0$を帰無仮説として検定を行なえばよい。

ただし、通常の回帰モデルの検定と異なるのは、単位根があるとき、普通に計算されるt値やF値はt分布やF分布に従わないため、普通のt検定やF検定ができないことである。t値が従う分布はディッキー＝フラー（1981)によって与えられているので、これを利用する。（表17.1を見よ。）具体的には、$(\rho-1)=\alpha_0/\delta(1)$と$\alpha_j=-\delta_j$を利用して、

$$\hat{\rho}_\tau=\frac{\hat{\alpha}_0}{1-\sum_{i=1}^{k}\hat{\alpha}_k}$$

を計算し、左片側検定を行なう。つまり、臨界値とt値を比較して前者のほうが大きければ、$\rho=1$という帰無仮説を棄却する。

単位根の検定の手続きは上に述べたとおりだが、検定という統計的手続きの特性上、第一種の過誤（この場合単位根が存在するのに、それを見逃す）の確率をきびしく抑えているが、第二種の過誤（単位根が存在しないのに、あると結論する）の確率（１マイナス検出力）は問題にしなかった。これについては、次のようなことが知られている。

[5]興味ある読者は、上記の変形を試みよ。

[6]$L^0=1$に対応する係数は一般性を失うことなく1とおいた。

表 17.1: t 値の経験分布

標本数	$\hat{\tau}$が表の中の数値より小さい確率			
T	0.90	0.95	0.975	0.99
25	2.77	3.20	3.59	4.05
50	2.75	3.14	3.47	3.87
100	2.73	3.11	3.42	3.78
250	2.73	3.09	3.39	3.74
500	2.72	3.08	3.38	3.72
∞	2.72	3.08	3.38	3.71
s.e.	0.004	0.005	0.007	0.008

- AR 多項式のゼロが単位根に近いほど、検出力は低い。
- 単位根を持つ確率過程は、定常過程により近似できる。
- MA 多項式を持つモデルを使う単位根検定は検出力が低い。

結局のところ、小標本しか得られない経済データの場合、単位根検定の結果を全面的に信用するのは問題があるということである。もっとも、単位根が重要であることには変わりはない。

17.3.8 ショックの持続性

すでに述べたように、伝統的な考え方では実質国民総生産の変動は、トレンドからの一時的な乖離を表わす。この考え方は、８０年代の初頭まで支配的であった。ブランチャード (1981) はトレンド乖離部分が二次の自己回帰過程でうまく表現できると論じた。つまり、前の説明でいうと、d_tが AR(2) に従う。時系列解析でなされるインパルス応答をみて、ショックは５年ほどでほとんど消えると結論した。

それに対して、まったく反対の立場をとるのが、前節のネルソン＝プロッサー達の研究である。これは、トレンド自体が確率的に変動するため、水準自体はランダムウォークに従う。時系列解析の用語を使って、さらに述べれば単位根が存在するのが、現実の産出などの経済時系列であるというわけである。その場合、インパルス応答（MA 表現したときのラグ多項式）に１を代入したショックが将来時点に与える効果のパターンは減衰することがない。これは、ショックが恒久的なことを示唆する。

その後、実証上の問題は、ショックの影響は実のところどの程度恒久的かということにシフトしていく。以下で、$y_t = \ln Y_t$という産出量の対数値を考えるが、その恒久性は、すでに触れたがインパルス応答関数に１を代入した値で測定できる。または、コクラン (1986) の自己相関関数$\rho_j \equiv Cov(y_t, y_{t-j})/Var(y_t)$ を基にした尺度

$$\frac{1}{k+1}\frac{Var(y_{t+k+1}-y_t)}{Var(y_{t+1}-y_t)} = 1+2\sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{j}{k+1}\right)\rho_j \tag{17.35}$$

から類推されるノンパラメトリック統計量

$$\hat{V}^k \equiv 1+2\sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{j}{k+1}\right)\hat{\rho}_j$$

を用いることができる。($\hat{\rho}_j$は標本自己相関関数である。)[7]

なお、kはウィンドウの大きさといい、恣意的に定める必要がある。

注意 3 $$A(1) = \sqrt{\frac{V}{1-R^2}}$$

が成立する。$A(L)$はインパルス応答関数、Vは(17.35)のkを∞にもっていた極限値、$R^2 \equiv 1-Var(\varepsilon)/Var(\Delta y)$である。これの、標本統計量版は

$$\hat{A}(1) = \sqrt{\frac{\hat{V}^k}{1-\hat{\rho}_1^2}}$$

である。これを用いてショックの持続性を測ることができる。

17.4 一連の実証研究の意味:需要ショックと供給ショックの観点から

実物ショックが持続的な効果をもつため、経済変動が生ずるという立場は、実景気循環理論につながる。[8]それに対して、貨幣的なショックから決定論的なトレンドの回りを変動するいう立場は、70年代のルーカスやバロー達の合理的期待派の理論につながる。[9]

参考文献

Barro, R.J. and M. Rush (1980) "Unanticipated Money and Economic Activity," in S. Fischer, ed. *Rational Expectations and Economic Policy*,Univ of Chicago Press

Blanchard, O.J. (1981) "What is Left of the Multiplier-Accelerator?," *American Economic Review*, vol.71, 150-54

Cambell, J.H. and N.G. Mankiw (1987) "Permanent and Transitory Components in Macroecnomic Fluctuations," American Economic Review, vol.77,111-7

[7]キャンベル=マンキュウ(1987)を見よ。
[8]キドランド=プレスコット(1982)、ロング=プロッサー(1983)を見よ。
[9]ルーカス(1977)、バロー他(1980)などを見よ。

Cochrane, J.H. (1986) "How Big is the Random Walk in GNP?," Univ of Chicago

Kydland, F. and E.C. Prescott (1982) "Time to Build and Aggregate Fluctuations," *Econometrica*,vol50, 1345-70

Long, J.B. and C.I. Plosser (1983) "Real Business Cycles," *Journal of Political Economy*,vol.91, 39-69

Lucas, R.E. (1977) "An Equilibrium Model of the Business Cycle," *Journal of Political Economy*, vol.83, 1113-44

Nelson, C.R. and C.I. Plosser (1982) "Trends and Random Walks n Macroeconomic Time Series," *Journal of Monetary Economics*,vol.10, 139-62

Neuser, (1991)