第4章　クーン＝タッカーの定理（現代的条件つき最大化）

4.1　序

前章であつかった，古典的最大化の理論は，経済問題の本質のかなりの部分を教えてくれる．しかし，すべてではないし限界もある．それは，自由財の問題である．欲望達成のための代替的手段の価値づけは，最大化問題の中でラグランジュ乗数として表現されることになるが，それがどのような状況でゼロとなり,「自由財」として経済問題の対象から事実上除外されるかは，扱い得ない．

ユートピアは，われわれの経済問題が全部あるいは大部分解消される社会である．そうした社会で，欲望達成の制約条件のうちどれが，解消されるかが本質であるが，その問題はわれわれの枠組みでは，ラグランジュ乗数がゼロになる制約の発見として定式化される．この問に本格的に答える数学理論は，半世紀ほど前に考えだされたKuhn-Tuckerの定理である．ラグランジュ乗数による古典的解法が200年の歴史があるのにやや意外に思う諸君がいるかもしれない．証明を詳しくみるとわかるが，古典的解法がラグランジュ乗数の存在証明が，陰関数の定理に依拠するのに対して，Kuhn-Tuckerの定理においては，その部分がMinkowski-Farkasの定理という線形代数の理論に依拠するなど，数学的な内実が異なっている．

4.2　問題設定

この節では，一般的な不等式制約条件つきの最大化問題を考える．記号は，前章同様とする．制約条件はm個の関数$g_i(\mathbf{x})$

によって

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

としてあらわされるものとする．不等式制約になっていること以外に，前章の問題設定と違うのは，制約条件の個数と x の次元について，特別に何も規定しない点である．

さて，以下では制約集合を

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}\}$$

のように記す.

演習 1

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \\ g_2(\mathbf{x}) = x_2 - x_1 \\ g_3(\mathbf{x}) = x_2 + x_1 \end{cases}$$

の場合について，制約を満たす点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ の集合を図示せよ.

また，

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = x_1 x_2 - 1 \\ g_2(\mathbf{x}) = x_2 - x_1^2 \\ g_3(\mathbf{x}) = x_1 \end{cases}$$

という場合についても同様のことを行なえ.

4.3　制約想定

前章では，

$$\operatorname{rank} \mathbf{g}_{\mathbf{x}} = m$$

という仮定を設けた．Kuhn-Tucker の定理を証明するためには，これに対応する仮定を設ける必要がある．この仮定は制約想定とよばれるが，いくつかのタイプが存在する．ひとつは，ランクを用いた正規条件とよばれるものである．

仮定 1 $I(\mathbf{z}) = \{i \mid g_i(\mathbf{z}) = 0\}$ として，添字の集合を定義するとき，導関数のベクトルの集合 $\{\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}) \mid i \in I(\mathbf{z})\}$ が一次独立であるとき，$\mathbf{z}$ において，正規条件 *(regularity condition)* が満たされているという.

もう一つは,

仮定 2 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ が凹関数であり，かつ制約集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}\}$ が内点を持つ.

というスレーターの条件とよばれるものである..

より一般的な制約想定は，Kuhn-Tucker 自身による.

仮定 3 $I(\mathbf{z}) = \{i \mid g_i(\mathbf{z}) = 0\}$ として，添字の集合を定義するとき，導関数のベクトルの集合 $\{\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}) \mid i \in I(\mathbf{z})\}$ が張る錐の任意の点が，制約経路をもつとき，*Kuhn-Tucker* の制約想定を満たすという．ここで，張る錐とは集合

$$K(\mathbf{z}) = \{\mathbf{z}\} + \{\xi \mid \forall i \in I(\mathbf{z}) : \ \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z})\xi \geq 0\}$$

であり，$\mathbf{y} \in K(\mathbf{z})$ に対する制約経路は，微分可能な関数

$$e : [0, 1]; \rightarrow \ Dom(\mathbf{g})$$

のうち，以下の条件

$$e(0) = \mathbf{z}$$
$$(\exists \rho > 0) \ \frac{de}{dt}(0) = \rho(\mathbf{y} - \mathbf{z})$$

$$(\exists\tau)(\forall t \in [0,\tau])\ \mathbf{g}(e(t)) \geq \mathbf{0}$$

をみたすものをいう．

以上の定義は難しく思えるが，張る錘の任意の点に対して，最適点を出発点として，その近傍において制約集合に含まれ，その出発点の方向微分が張る錘と最適点を結ぶ線分の方向に一致するように，ニョロニョロした「滑らか」な糸としての経路が存在することを主張している．

注意 1 制約想定は，最適点において成立しさえすればよい局所的な条件である．

注意 2 正規条件やスレーターの条件は，*Kuhn-Tucker*の制約想定の十分条件である．

*Kuhn-Tucker*の制約想定は，定理を証明する上で最も弱い仮定であると考えられるが，実際の問題において，その仮定を確認するのは容易ではないために，*Kuhn-Tucker*の制約想定の十分条件がいろいろ考えれてきたのである．

4.4 最適値問題の課題

一言に最適値問題といっても，以下のような問題から成り立っている．

1. 選択対象の集合は非空か
2. 選択対象が非空のとき，最適解が存在するか
3. 最適解が存在するとき，最適解の必要条件や十分条件はどうなるか
4. 最適解は一意か
5. 最適解を見つけるアルゴリズムはどんなものか

このような形で，最適値問題が意識されるようになったのは，実は比較的最近であり，半世紀ほど前である．クーン＝タッカー定理は種に３番目の問題への優れた解答であると考えるとよい．

4.5　最適のための必要条件

上の問題設定における，最適解の条件として知られているのは，鞍点条件と Kuhn-Tucker 条件である．

条件 1 ラグランジュ関数を $f(\mathbf{x}) + {}^t\lambda\mathbf{g}(\mathbf{x})$ と定義するとき，最適解 $\mathbf{x}^*$ に対して $\lambda^* \geq \mathbf{0}$ が存在して，

$$(\forall\mathbf{x})(\ \forall\lambda \geq \mathbf{0})\ f(\mathbf{x}) + {}^t\lambda^*\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*) + {}^t\lambda^*\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}^*) + {}^t\lambda\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)$$

条件 2 最適解 $\mathbf{x}^*$ に対して，$\lambda^* \geq \mathbf{0}$ が存在して，

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) + {}^t\lambda^*\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0} \quad and \quad {}^t\lambda^*\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$$

注意 3 条件 *1* は鞍点条件，条件 *2* はクーン＝タッカー条件といわれる．

クーン＝タッカー条件は，最適点において，目標値を一番高める方向ベクトルのちょうど反対むきのベクトル $-f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)$ が，n 次元ベクトルの集合 $g_{i\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\}_{i=1,2,\cdots,m}$ が張る正錐

$$\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \mid (\forall i)\lambda_i \geq 0\}$$

に含まれるという，幾何学的な意味を持つ．これは，古典的な最適値問題における限界条件や接点条件を，現代的に書き直したものになる．

4.6　主要な結論

まず

定理 1 制約想定が満たされるとき，クーン＝タッカー条件は，最適解の必要条件となる．

これの証明には，次の Minkowski-Farkas の定理を使う．

定理 2 行列 Q，ベクトル $\mathbf{r}$ が与えられているとする．このとき，

$$(\forall \mathbf{x})\left(Qx \geq \mathbf{0} \implies {}^t\mathbf{r}\mathbf{x} \geq 0\right) \iff (\exists \mathbf{p} \geq \mathbf{0})\left({}^t\mathbf{r} = {}^t\mathbf{p}Q\right)$$

[定理1の証明] さて，$\mathbf{x}^*$ を最適点としよう．すると，$\mathbf{x} \in K(\mathbf{x}^*)$ に対応する勝手な制約経路 $e(t)$ をとると，制約経路の定義から

$$(\forall t)\ f(e(0)) \geq f(e(t))$$

が成立する．

合成関数 $f(e(t)) = f \circ e(t)$ は t に関して微分可能であるから

$$\frac{df \circ e}{dt}(0) \leq 0$$

詳しく書くと，

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}$$

すこし書き直して，

$$-f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0}$$

ここまでで，

$$(\forall i \in I(\mathbf{x}^*))g_{i\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0} \Longrightarrow -f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0}$$

よって，Minkowski-Farkas の定理をもちいると，

$$(\forall i \in I(\mathbf{x}^*))(\exists \lambda_i \geq 0) \quad -f_{\mathbf{x}}(x^*) = \sum_{i \in I(\mathbf{x}^*)} \lambda_i g_{i\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)$$

さらに $I(\mathbf{x}^*)$ に含まれない添え字 j については，$\lambda_j = 0$ とおく．このとき ${}^t\lambda = (\lambda_1 \ \ldots \ \lambda_m) \geq {}^t\mathbf{0}$ について，

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) + {}^t\lambda \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

が成立する．

$I(\mathbf{x}^*)$ の定義から，

$$g_i(\mathbf{x}^*) > 0 \implies \lambda_i = 0$$

また，

$$\lambda_i > 0 \implies g_i(x^*) = 0$$

より，

$${}^t\lambda \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$$

(証明おわり)

定理 3 目的関数 f, 制約関数 g がともに凹関数であるとき，*Kuhn-Tucker* 条件は，最適解の十分条件となる．

[証明] $\mathbf{x}^*$ が Kuhn-Tucker 条件を満たすと仮定する．つまりラグランジュ乗数ベクトル ${}^t\lambda = (\lambda_1 \ \ldots \ \lambda_m) \geq \mathbf{0}$ が存在して，

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

$${}^t\lambda \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$$

が成立する．凹関数の性質から

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \leq f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

各 $i = 1, \ldots, m$ に対して

$$g^i(x) - g^i(x^*) \leq g^i_x(x^*)(x - x^*)$$

これより，今$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$を満たす勝手なベクトル$\mathbf{x}$をとると，

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) &\leq f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &\leq -{}^t\lambda \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \\ &\leq {}^t\lambda(\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ &\leq -{}^t\lambda \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &\leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

最初の不等式はfが凹関数であることによる．２番目の不等式はクーン=タッカー条件のラグランジュ乗数に関する条件を代入して$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)$を消去したものである．第３の不等式は$\mathbf{g}$の凹関数の性質である．第４の不等式はクーン=タッカー条件のうち${}^t\lambda \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$を代入したものである．最後の不等式は，非負のベクトル$g(x)$と非負のベクトルλの内積をとると非負の実数をとることから明らかであろう．

以上の不等式はx^*が最適であることを示す．(証明おわり)

定理 4 鞍点条件は，クーン＝タッカー条件の必要条件となる．

定理 5 目的関数f，制約関数$\mathbf{g}$がともに凹関数であるとき，クーン＝タッカー条件は，鞍点条件の必要条件となる．

4.7 最適値問題の変形

経済数学の教科書によっては，この講義とは違ってつぎのような非負制約を含む形で最適値問題を定式化しているものもある．

m 個の関数 $g_i(x)$ による

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

と

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

の制約のもとで，$f(x)$ を最大にせよ．

これは，われわれの問題定式化の特殊ケースである．なんとなれば，$x \geq 0$ の部分を，n 個の余分な非負制約として扱えばよいだけである．

演習 2 すぐ上の問題設定に対して，この講義のクーン＝タッカー条件を適用して，必要条件を求めよ．

4.8　制約想定の重要性

制約想定は重要である．つぎのような，制約集合は点によっては制約想定をみたさない．

例 1

$$f(x_1, x_2) = x_1 \tag{4.1}$$

を

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (1 - x_1)^3 - x_2 \end{pmatrix} \geq 0 \tag{4.2}$$

の下で最大化することを考える．図で描くと$(x_1^*, x_2^*) = (1,0)$が最適値であることは明らか．このとき$I(x^*)$は$\{2,3\}$である．

$$\{\frac{\partial}{\partial x} g_i(x^*) \mid i \in I(x^*)\} = \{(0,1),\ (0,-1)\}$$

となる．

$$K(x^*) = x_1\text{軸そのもの}$$

これはクーン＝タッカーの制約想定を満たさないし，最適点ではクーン＝タッカー条件は成立しない．

4.9 クーン＝タッカーの定理による最適解の計算

クーン＝タッカーの定理による最適解の特徴づけは，古典的ラグランジュ乗数法のそれと異なり，不等式・方程式混合体系になっている．よって，具体的に計算するときには，厄介な手続きを踏まなくてはいけいない場合も出てくる．

以下の例は，図示することによって簡単に解けるが，クーン＝タッカー定理の必要条件だけに頼って解くのは手間がかかる．

$$\text{maximize} \quad 3x_1 + x_2$$

$$\text{subject to} \quad \begin{cases} -x_1^2 + x_2 \geq 0 \\ x_1^2 - x_2 + 2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

最適解の存在は，この場合制約集合がコンパクト集合（有界で閉な集合）になることから保証される．[1]

つぎに，クーン＝タッカー条件の成立を基礎に解を確認するのは，制約条件のうち三つともが有効になる，つまり等式で成

[1] これも，解析的に解くのは，厄介である．閉集合であることは明らかであるが，有界であることは，適当な大きさの正方領域をうまく設定し，制約集合がそこに含まれることを示さなくてはいけない.「うまく設定」するという部分について図示しない限り明確な指針はない．

立することがないことを考えて，いくつかの組み合わせを，試さなくてはならない．可能性は，

1. 2本の等式が成立する場合．(3種類）
2. 1本の等式が成立する場合．(3種類)
3. 等式での成立がない場合.

目的関数が上の例以外，例えば

$$x_1,\ \ \frac{1}{2}x_1 - x_2,\ \ 16 - \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - (x_2 - 1)^2$$

などは，上の場合分けのどれかに対応する．

形式的に，有効制約の可能性を試して，解を求めたとしても，その点がクーン＝タッカー定理を適用しうる点なのかを確かめる必要がある．つまり制約想定の確認である．これも，制約が複雑なとき，厄介であることがある．上の例では，内点による確認ができるのでそれほど厄介ではない.