国民所得論講義ノート

伊藤幹夫

平成10年 1月 7日

Chapter 9

合理的期待の基礎

この章では、合理的期待について少し突っ込んで議論する。

9.1 予想と合理的行動

経済主体が何らかの決定を行うとき、将来のさまざまなことについての情報が完備していることはほとんどないといってよい。このことは、多くの場合経済主体が、予想に基づいて自らの行動を決定していることを意味する。人々の期待あるいは予想は、その行動についての決定を通じて経済全体に影響を与える。そこで、期待あるいは予想をどのように理論に取り込むかが重要になる。

期待あるいは予想を理論化するとき、まず期待がどのように形成されるかが問題となり、次にその期待が現象にどのように影響するかが問題となる。前者の問題については蜘蛛の巣理論に登場する静態的予想、インフレ理論によく使われる適応的期待、現在までの傾向を将来に延長する外挿予想などが有名である。これらは大体、決定論的な理論の枠組みで考えられている。これに対して、ここで説明しようとしている合理的期待は、不確実性下の期待形成を念頭においてつくられている。

合理的期待とは、簡単にいうと、将来の不確実性に直面する主体が、将来を予想するにあたって、現時点で利用可能なすべての情報を効率的に使って予想することを指す。この期待形成方式は、６０年代初頭にムースによって考案されたものである。数学的には、予測時点で利用可能とされる確率変数を所与とする条件付期待値で与えられる予測である。以下では、まず条件付期待値を正確に定義し、それが予測誤差の自乗を最小にする予測方式になることを示すことで、「合理的」の意味を明確にする。その後、合理的期待形成が使われる具体的な経済モデルを示し、そうしたモデルの特徴を調べる。[1]

[1]以下において、数学的に繁雑な記述もある。興味のない学生諸君は、9.4節と 9.6節は飛ばしてよい。

9.2 条件付期待値：合理的期待の基礎

経済学のテキストで合理的期待を扱うとき、多くの場合条件付期待値についての確率論的な説明はない。普通は、オペレータとしての条件付期待値の演算規則を与えるにとどまる。ここでは、条件付期待値の正確な意味を説明して、次への準備とする。

9.2.1 条件付期待値の定義

$P(A)$ を事象 A が起こる確率とする。事象 C について $P(C) > 0$ が成り立つとき、C を所与とする A の条件付確率は、

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \tag{9.1}$$

と定義される。いま、X を確率変数として

$$F(x|C) = P(X \leq x|C) \tag{9.2}$$

とおく。$F(x|C)$ は C を所与とした X の条件付分布と呼ぶ。[2]

定義 3 可測関数 $\varphi : \Re \to \Re$ を考えるとき、

$$E[\varphi(X)|C] = \int_{\Re} \varphi(x) dF(x|C)$$

を C を所与としたときの $\varphi(X)$ の条件付期待値という。

注意 29 明らかに、

$$E[\varphi(X)|\Omega] = E[\varphi(X)]$$

演習 8 上のことを示せ。

上の定義は一般的だが、右辺の積分が応用上扱いにくい。そこで、密度関数を用いた表現を次の節で考える。

9.2.2 密度関数を使った条件付期待値の表現

条件 C の与え方として、たとえば次のものが考えられる。$(a, b]$ を実数直線のある区間として、

$$C = \{\omega : X(\omega) \in (a, b]\}$$

[2] 数学的に正確にいうと、$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とすると、事象 A や C は $\mathcal{B}$ の元である。Ω を全事象とよぶ。また、(9.2) の右辺は、$P(\{\omega \in \mathcal{B}|X(\omega) \leq x\}|C)$、あるいは $P(X^{-1}((-\infty, x])|C)$ と書くのが正しい。$X^{-1}((-\infty, x])$ は $\mathcal{B}$ の元である。

あるいは、考慮の対象になっているX以外の確率変数Yに対して、

$$C = \{\omega:\ Y(\omega) \in (a, b]\}$$

より一般的にはYの実現値のある集合Bに対して

$$C = \{\omega:\ Y(\omega) \in B\} \left(= Y^{-1}(B)\right)$$

が考えられる。以下では、最後の場合に焦点をあてる。さて、そのとき、このCを$Y \in B$と略記し、さきに定義した$F(x|C)$を$F_{X|Y\in B}(x)$とかくことにする。すなわち、

$$F_{X|Y\in B}(x) = P(X \le x | Y \in B)$$

である。

次に、条件付期待値を密度関数を中心にして考えてみよう。(X, Y)の同時密度関数を$f(x, y)$とおく。

$$\begin{aligned} F_{X|Y\in B}(x) &= \frac{P(X \le x, Y \in B)}{P(Y \in B)} \\ &= \int_{-\infty}^{x} \left[\frac{1}{P(Y \in B)} \int_B f(u, v)dv\right] du \end{aligned}$$

よって、密度関数の定義により、$F_{X|Y\in B}(x)$の密度関数は

$$f_{X|Y\in B}(x) = \frac{1}{P(Y \in B)} \int_B f(x, y)dy \tag{9.3}$$

となる。定義 3 を考慮すると$\varphi(X)$の条件付期待値は

$$E[\varphi(X)|Y \in B] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{X|Y\in B}(x)dx \tag{9.4}$$

で与えられる。

9.2.3 $Y = y$を所与としたときの条件付期待値

応用上、$Y = y$として条件付期待値を計算することがある。連続型の確率変数を考えるとき、$P(Y \in \{y\}) = 0$であるから、(9.3) での右辺の分母がゼロになるため、上で定義した条件付確率は意味を持たないように思える。しかし、yを含む微小な区間を考えて上の条件付確率を計算し、その区間を小さくしていった極限をとることで、その困難を克服することができる。

$\varepsilon > 0$をとり、

$$B_\varepsilon = \{\omega \in \mathcal{B}:\ y - \varepsilon \le Y \le y + \varepsilon\}$$

とおき、$B = \{y\}$であるときの$f_{X|Y\in B}$をあらためて

$$f_{X|Y\in B}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_{X|Y\in B_\varepsilon}(x)$$

で定義する。このとき、$P(Y \in B_\varepsilon) > 0$ より、

$$f_{X|Y\in B}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{P(Y \in B_\varepsilon)} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(x,v)dv$$

fは連続としてよいから、平均値の定理から

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(x,v)dv = 2\varepsilon f(x,\xi)$$

となる$\xi \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$が存在する。同様に、平均値の定理から

$$P(Y \in B_\varepsilon) = \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f_Y(v)dv = 2\varepsilon f_Y(\eta)$$

となる$\eta \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$が存在する。ここで、$f_Y(\cdot)$は$Y$の周辺密度関数である。$\varepsilon \to 0$のとき$\eta \to y$かつ$\xi \to y$であるから、

$$f_{X|Y\in B}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x,\xi)}{f_Y(\eta)} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

この右辺は、$Y = y$を所与としたときのXの条件付密度関数とよばれるものにほかならない。これを$f_{X|Y}(x|y)$と書いたりする。$B = \{y\}$のとき

$$f_{X|Y\in B}(x) = f_{X|Y}(x|y)$$

ということになり、結局(9.4)より

$$\begin{aligned} E[\varphi(X)|Y=y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{X|Y}(x|y)dx \\ &= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x,y)dx \end{aligned} \tag{9.5}$$

以下の定理が成立する。

定理 1 (1) $E|\varphi(X)| < \infty$のとき、$f_Y(y) > 0$なる$y \in \Re$に対して

$$E[|\varphi(X)||Y=y] < \infty$$

(2) $E|\varphi(X)| < \infty$のとき、

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[\varphi(X)|Y=y] f_Y(y)dy$$

(3) 可測関数$\varphi:\ \Re \to \Re$、$E|\varphi(X,Y)| < \infty$に対して

$$E[\varphi(X,Y)|Y=b] = E[\varphi(X,b)|Y=b]$$

特に$\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$なら

$$E[\varphi(X,Y)|Y=b] = \varphi_2(b)E[\varphi_1(X)|Y=b]$$

演習 9 上の定理の (1) と (2) を証明せよ。(3) は難しいのでやらなくてよい。

系 1 (1) 任意の $b \in \Re$ に対して、

$$E[1|Y=b]=1$$

(2) 任意の $b \in \Re$ に対して、

$$E[Y|Y=b]=b$$

演習 10 上の系を証明せよ。

注意 30 これまでの議論を拡張して、複数の確率変数を条件とする条件付期待値

$$E[\varphi(X)|Y=y, Z=z, W=w, \ldots]$$

も定義することができる。時系列を考えるときには、その定義をつかう。

9.2.4 条件付期待値の拡張

合理的期待形成仮説を正しく理解するためには、上で定義した条件付き期待値を知っているだけでは不十分である。というのも、合理的期待形成仮説が使われるモデルに登場する、時間の経過に従って情報が増大していくという想定を、数学的に表現することは上の定義を用いては困難だからである。そこで以下のような拡張を行う。

簡単化のため以下では分布関数は密度関数を持つと仮定する。われわれはすでに確率変数 Y が y という実数値をとったという条件の下での X の期待値の定義を知っている。直感的には Y が y をとったいう情報を得て、事象の生起についての確からしさの評価である確率測度を変更した上で X の期待値を計算したものだと考えればよい。この期待値は実数値である。そこで $E[X|Y=y]$ を y に対して実数値を与える関数として $h(y)$ のように考える。さらに、Y を代入すると $h(Y)$ は一つの確率変数とみることができる。ここで $E[X|Y]$ と書くことにしよう。

ここでの議論は、条件となる変数が複数になる場合にも拡張できる。たとえば、Y_1 と Y_2 が与えられたときの X の条件付期待値 $E[X|Y_1, Y_2]$ が定義できる。これも当然ひとつの確率変数であることに注意せよ。

最後に拡張された条件付期待値の性質を挙げておく。

定理 2 (1) X と Y が独立であるとき

$$E[X|Y]=E[X]$$

が成立する。[3]

(2)

$$E[XY|Y]=Y\ E[X|Y]$$

[3]正確には、左辺の確率変数は右辺を一定値としてとるということである。

が成立する。特に、Xを定数とすると

$$E[Y|Y]=Y$$

を得る。
(3)

$$E[aX+bY|Z]=aE[X|Z]+bE[Y|Z] \quad a,b\in\Re$$

(4)

$$E\left[E[X|Y]\right]=E[X]$$

(5) 確率変数Y_1とY_2、Xを考える。このとき

$$E\left[E[X|Y_1,Y_2]|Y_i\right]=E[X|Y_i] \quad (i=1,2)$$

(1) は、Yが情報をまったくもたらさない場合についての性質である。(2) はすでに得られてしまった情報は定数として処理してかまわないということを意味する。(3) は$E[\,\cdot\,|Y]$がオペレータとして線形であることを示す。(5) は情報が増加したときのある確率変数の期待値を情報増加以前の情報の下で期待値をとると、情報増加以前の情報のもとでの期待値に等しいことを意味する。

注意 31 経済学で条件付期待値が登場するとき、現在の時点t以前の確率変数の系列、たとえば$p_{t-1},p_{t-2},p_{t-3},\ldots$の下での条件付き期待値

$$E[p_t|p_{t-1},p_{t-2},p_{t-3},\ldots]$$

を考えることが多い。このとき$I_t=\{p_{t-1},p_{t-2},p_{t-3},\ldots\}$を情報集合とよび、この条件付期待値を$E[p_t|I_t]$や$E_{t-1}[p_t]$のように略記する。

演習 11 次のことを示せ。
(1) $k>0$とする。$x_{t-k}\in I_t$であるとき。つまり、x_{t-k}がt時点の情報集合に含まれるとき、

$$E[x_{t-k}|I_t]=x_{t-k}$$

(2) $I_t\supset I_{t-1}$であるとき。つまり、情報が増大しているとき、

$$E\left[E[x_t|I_t]\,|I_{t-1}\right]=E[x_t|I_{t-1}]$$

ただし、x_tはI_tに含まれている必要はない。

9.2.5 回帰と条件付期待値

今度は、馴染み深い最小２乗原理と条件付期待値の関係をみてみよう。

(X,Y) を２次元連続型確率ベクトルとする。X と Y が独立でないとき、両者の関係を実数値関数 $y=h(x)$ で結び付けることを考えよう。これは、X の実現値 x が観察されたとき Y の実現値 y を予想する方式を見つけようとしていることにほかならない。$h(\cdot)$ を見つける基準として、

$$L = E\left[[Y-h(X)]^2\right]$$

を最小にすることをしばしば考える。

このとき次の定理が成立する。

定理 3 $E(Y^2)<\infty$、$E(h(X)^2)<\infty$ とするとき、L を最小にする h は $h(x)=E[Y|X=x]$ で与えられる。

証明 定理 2 の (4) より

$$L = E[[Y-h(X)]^2] = E[E[(Y-h(X))^2|X]]$$

従って、L を最小にするには任意の x に対して $E[[Y-h(X)]^2|X=x]$ を最小にすればよい。定理 1 の (3) より

$$\begin{aligned} E[[Y-h(X)]^2|X=x] &= E[[Y-h(x)]^2|X=x] \\ &= E[Y^2-2h(x)Y+h^2(x)|X=x] \\ &= E[Y^2|X=x]-2h(x)E[Y|X=x]+h^2(x) \end{aligned}$$

を得る。$X=x$ を与えたとき、$h(x)$ と $h^2(x)$ が定数であり、$E[1|X=x]=1$ ということを使った。右辺を $h(x)$ の二次関数とみれば、これを最小にする $h(x)$ が $h(x)=E[Y|x]$ で与えられることがすぐわかる。□

定義 4 $E[Y|X]$ を Y の X の上への回帰という。

注意 32 上では、h には何の制限も設けなかった。

$$h(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

に制限すると、最小２乗法からは X と Y の分散 $Cov(X,Y)$、共分散 $V(X)$ から β_0 と β_1 を決定する式

$$\beta_1 = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$$

$$\beta_0 = E[Y]-E[X]\frac{Cov(X,Y)}{V(X)}$$

を得る。しかし、その $h(X)$ が $E[Y|X]$ に等しくなる保証はない。ただし、(X,Y) が２次元正規分布に従うとすると、h になんの制限を設けなくても $E[Y|x]=\beta_0+\beta_1 x$ が導かれる。実はこれが、統計学におけるガウスの定理の内容である。

注意 33 上の結論は、$(Y, X, Z, \ldots)$ にも拡張することができる。要するに、Y についての「最良」の予測、つまり Y の $X, Z, \ldots$ への回帰は、$X, Z, \ldots$ に関する Y の条件付期待値に等しくなる。

以上で、条件付期待値に基づく合理的期待形成が、なぜ「合理的」であるかが明確になった。

9.3 合理的期待モデル入門

この節では、最初の考案者ムース自身の簡単なモデルを用いて、合理的期待としての条件付期待値が、経済主体の期待形成理論にどのように組み込まれているかをみる。より複雑なモデルについては次の節にゆずる。

ムースは蜘蛛の巣理論を基礎に合理的期待仮説を説明する。まず、以下の体系を考える。

$$D_t = a - bp_t \tag{9.6}$$

$$S_t = \alpha + \beta p_t^e + u_t \tag{9.7}$$

$$D_t = S_t \tag{9.8}$$

D、S はそれぞれ需要と供給、p は価格。また、p_t^e は $t-1$ 期に予想された t 期の価格である。u_t は外生ショックで実数または確率変数である。

未知数は、D、S、p、p_t^e と考えられるから、方程式が一つ足りない。p_t^e を所与とすると、上の体系は形式に解けて、D、S、p は p_t^e の関数となる。しかし、通常直接観察されず、データとして扱うことのできない予想価格 p_t^e がどのように決まるか、という問題が残ってしまう。

そこで補う方程式として、p_t^e とその他の変数の関係を規定するものを採るとき、ある価格の予想方式を導入したと考えてよい。たとえば、

$$p_t^e = p_{t-1} \tag{9.9}$$

という静態的予想を仮定し、さらに確率ショックがないと考えて、$u_t = 0$ と上の３本の方程式と連立させれば通常の蜘蛛の巣理論がえられる。

いま、確率的ショックがないと考えているから、情報を完全に利用する合理的主体は、$t-1$ 期において t 期の均衡価格を予想すると考えられる。つまり、

$$p_t^e = p_t \tag{9.10}$$

という完全予見をおこなう。これを $u_t = 0$ の下で、上の３本の方程式と連立させて

$$p_t^e = \frac{a - \alpha}{b + \beta} \tag{9.11}$$

を得る。

適応期待を考えるなら、λ をゼロと１の間の定数として

$$p_t^e - p_{t-1}^e = \lambda(p_{t-1} - p_{t-1}^e) \tag{9.12}$$

が期待の形成を表す。これは、期待の誤差（右辺）の大きさに比例して、予想を改訂する調整方程式とみなせる。

注意 34 適応期待は、

$$p_t^e = \lambda p_{t-1} + (1-\lambda) p_{t-1}^e$$

と書き直すと、前期の実際の価格と、前々期に予想した前期の価格の加重平均が今期の予想価格になることだと考えることができる。

演習 12 適応期待を考えるとき、p_tはどんな挙動を示すかを考えよ。

以上は、外生ショックがない場合であった。u_tが白色雑音のとき(9.6)、(9.7)、(9.8) からDとSを消去して、

$$p_t^e = E_{t-1} p_t \tag{9.13}$$

とおくことで

$$a - bp_t = \alpha + \beta E_{t-1} p_t + u_t \tag{9.14}$$

この両辺に$t-1$時点の条件付期待値オペレーターE_{t-1}を作用させる。なおE_{t-1}は$E[\,\cdot \mid p_{t-1}, S_{t-1}, D_{t-1}, p_t$
の略記である。$E_{t-1} u_t = 0$と$E_{t-1} E_{t-1} p_t = E_{t-1} p_t$に注意して、

$$E_{t-1} p_t = \frac{a-\alpha}{b+\beta} \tag{9.15}$$

を得る。これは、(9.11) と同じように見えるが、今度はp_tは確率変数の系列であることに注意せよ。(9.15) を (9.7) に代入して

$$S_t = \alpha + \beta \frac{a-\alpha}{b+\beta} + u_t \tag{9.16}$$

という過程が得られる。

9.4 合理的期待モデルの解法

ここでは、まず合理的期待モデルの一般的枠組みを示す。その後で、経済学によく登場する合理的期待モデルの具体的な例を、一般的枠組みを踏まえながら考える。次に、合理的期待モデルを解く方法を述べる。

9.4.1 合理的期待モデルの一般的枠組み

ここでは、合理的期待モデルの一般論を簡単に述べる。

x_t: 内生変数
z_t: 外生変数
u_t: 撹乱項（白色雑音）
$x^e_{t|t-k}$: $t-k$時点で形成されたx_tの予想

を考える。[4]
x_tやz_tはベクトルであってもよい。（そのとき、下のfはベクトル値関数である。）
予想を含む一般的なモデルは、

$$f\left(x_t, x_{t-1}, \ldots, z_t, z_{t-1}, \ldots, (x^e_{t+i|t-j})_{ij}, u_t\right) = 0 \tag{9.17}$$

で与えられる。

ここで、この体系を「解く」とは、内生変数x_tを外生変数の現時点の値をおよび過去の値、$z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \ldots$と撹乱項を用いて表現することをいう。ここで、表現されたものを誘導形とよぶことがある。すでに、前の節で示唆されたように、(9.17) のみでは、「解く」ことはできない。欠けている方程式は、$x^e_{t+i|t-j}$とその他の変数を関係づける式、つまり予想方式を特定化したものである。合理的期待仮説は、それを

$$x^e_{t+i|t-j} = E[x_{t+i} \mid I_{t-j}] \tag{9.18}$$

とおく。ここで、I_tはt時点の情報集合で、t時点以前の内生変数と外生変数の集合と考える。[5][6]

さて、合理的期待仮説が他の期待形成仮説と大きくことなるのは、(9.18) 自身は、予想方式を具体的に示さないことである。換言すると、静態的予想、適応予想、外挿予想にしろ、それぞれ元々の体系(9.17)から独立に、具体的な式で示すことができるのに対して、合理的期待(9.18)は(9.17)に依存して具体的な式が定まる。特に、(9.17)の形式が同一でも、撹乱項の確率構造を別のものに代えるだけで、合理的期待(9.18)の具体的な表現はまったく違ったものになってしまう。[7]

9.4.2 合理的期待モデルいろいろ

この節では合理的期待を用いた具体的な経済モデルをいくつか紹介する。

[4]前の節での記法と違うのは予想の形成時点を明示するからである。

[5]なお、予想を含む一般モデルを「解く」という言い方を、内生変数x_tをそれの過去の値x_{t-i} $i > 0$ ならびに外生変数の現時点の値をおよび過去の値、$z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \ldots$と撹乱項を用いて表現する場合にも使うことがある。これは、その表現が最初に定義した「解」に比較的容易に変形できることが多いためである。

[6]以下では、$E[x_{t+i} \mid I_t]$を$E_t[x_{t+i}]$というように略記する。

[7]撹乱項の系列相関の与えかたによっては、合理的期待が適応期待と一致してしまう場合があることをムースは示している。

裁定均衡

不確実性のない安全資産と不確実性のある資産、たとえば株式のようなものとの裁定を考える。安全資産の収益率はrで一定とし、株式の価格をp_t、配当をd_t という確率変数で表すことにする。市場に取引費用その他の摩擦要因がなければ、裁定均衡は、キャピタル・ゲインの予想$\frac{E_t[p_{t+1}]-p_t}{p_t}$ と配当単価$\frac{d_t}{p_t}$の和が安全資産の収益率rに等しくなることと表現できる。よって、

$$\frac{E_t[p_{t+1}]-p_t}{p_t}+\frac{d_t}{p_t}=r \tag{9.19}$$

と書ける。これを整理すると既に見た一般型

$$p_t = aE_t[p_{t+1}] + ad_t \tag{9.20}$$

にまとめられる。ただし、ここで$a := \frac{1}{1+r} < 1$である。

ケーガンのモデル

合理的期待モデルといえばケーガンのモデルといわれるくらい有名なモデルである。とは言っても、理論自体はかなり単純である。具体的には、インフレが進行している経済において、貨幣需要が期待インフレ率に依存し、しかもそれが指数関数として表されるとする。よって均衡では、

$$\frac{M_t}{P_t} = \exp\left[-\alpha\left(\frac{E_t[P_{t+1}]-P_t}{P_t}\right)\right] \tag{9.21}$$

が成立する。M_tは名目貨幣残高、P_tは物価水準である。変数を対数変換する。変換後の変数は小文字で表し、対数変換に対応して期待インフレ率を

$$E_t[p_{t+1}] - p_t = \frac{E_t[P_{t+1}]-P_t}{P_t}$$

で近似することにすれば、一般形

$$p_t = aE_t[p_{t+1}] + (1-a)m_t \tag{9.22}$$

が得られる。ただし、$a := \frac{\alpha}{1+\alpha}$である。

ルーカス型供給関数を使ったモデル: マーク１

合理的期待モデルを語るとき、ケーガンのモデルと並んでよく登場するものにルーカス型供給関数がある。ここでは、ルーカス型供給関数を用いた簡単な一般均衡を考える。ただし、登場する変数はすべて対数変換されたものとする。

$$\begin{aligned} m_t - p_t &= y_t - V && (9.23)\\ y_t - y^* &= \beta(p_t - E_{t-1}p_t) && (9.24)\\ m_t &= \alpha y_{t-1} + u_t && (9.25)\end{aligned}$$

m_t、p_t、y_tはt期の名目貨幣残高、物価、実質産出量をそれぞれ表す。y^*は完全雇用における産出量で定数とする。Vは貨幣の流通速度で定数、α、βはパラメターで、これらは正の定数とする。u_tは撹乱項である。

(9.23) は貨幣数量方程式、(9.24) はルーカス型供給関数であり、今期の価格が前期に形成された価格の予想を上回るとき、今期の産出が完全雇用時の産出量を上回るとする。(9.25) は政府の貨幣供給ルールで、前期の産出に比例する部分と撹乱項からなる。

上の体系で、m_tを消去しp_tとy_tについて整理すれば一般形の体系

$$p_t = \frac{1}{1+\beta}(\alpha y_{t-1} - y^* + \beta E_{t-1}[p_t] + V + u_t) \tag{9.26}$$

$$y_t = \frac{1}{1+\beta}(\alpha\beta y_{t-1} + y^* - \beta E_{t-1}[p_t] + \beta V + \beta u_t) \tag{9.27}$$

を得る。

ルーカス型供給関数を使ったモデル: マーク２

今度は、(9.23) を貨幣需要方程式とみて、これにケーガンのモデルのようなインフレ要因を導入し、貨幣供給ルールをやや単純化して次のような体系を考える。

$$m_t - p_t = y_t - \gamma(E_{t-1}[p_{t+1}] - E_{t-1}[p_t]) \tag{9.28}$$

$$y_t - y^* = \frac{1}{\delta}(p_t - E_{t-1}p_t) \tag{9.29}$$

$$m_t = \bar{y} + u_t \tag{9.30}$$

m_t、p_t、y_t、y^*は上と同様。γ、δはパラメターで、これらは正の定数とする。u_tは撹乱項である。$\bar{y}$は定数とする。

演習 13 マーク１同様にp_tとy_tについて一般形を求めよ。

9.4.3 合理的期待モデルの解法事始め：標準解法

合理的期待モデルを解く方法に決定版はない。これは、合理的期待モデルの解が一意になるとは限らず、解法によって異なる解を導出してしまう可能性があるためである。合理的期待モデルの解の非一意性については後に詳しく説明する。

9.4.2節で示したモデルを例にとって合理的期待モデルの解法を考える。実は、それ以外の三つのモデルは、現時点の内生変数が過去に形成された将来時点の変数に依存するようなモデルになっており、その場合往々にして解の一意性が保証されず、議論が複雑になるからである。

条件付期待値が予測子として線形になる事を保証するために、次の仮定を置く。

仮定 4 撹乱項は系列相関のない平均０、分散σ^2のガウス過程に従う。つまり、

(i) $(\forall t \forall j \neq t) \quad E[u_t u_{t-j}] = 0$

(ii) $(\forall t) \quad u_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$

この仮定と体系の線形性が以下の解法が正しいことを保証する。

ルーカス供給関数モデル：マーク１の場合、内生変数が将来の予想値に依存しないため比較的簡単に扱うことができる。つまり、大体以下のような手続きを踏んで解を求める。

1. モデル内の予想値（将来変数の予想値ではないとする）を所与として、内生変数についてモデルを解く。
2. 上で解いた結果に条件付期待値を作用させて、内生変数を消去して、予想値の方程式を得る。
3. 上の方程式の解として、予想値を求める。
4. 予想値を元の体系に代入して、内生変数の解を求める。

それでは、実際に解いてみよう。9.4.2節ですでに、第１段階はおわっている。そこで、(9.26) の両辺に条件付期待値 $E_{t-1}[\,\cdot\,]$ を作用させて、整理すると

$$E_{t-1}[p_t] = \alpha y_{t-1} - y^* + V \tag{9.31}$$

を得る。（第３段階終わり）この式を (9.27) に代入して、

$$y_t = y^* + \frac{\beta}{1+\beta}u_t \tag{9.32}$$

という y_t についての解が得られる。これを、(9.31) や (9.25)、(9.27) と連立させて最終的な解、

$$m_t = \alpha y^* + u_t + \frac{\alpha\beta}{1+\beta}u_{t-1} \tag{9.33}$$

$$p_t = -(1-\alpha)y^* + V + \frac{1}{1+\beta}u_t + \frac{\alpha\beta}{1+\beta}u_{t-1} \tag{9.34}$$

が計算される。

注意 35 時系列解析で考えると、(9.33) と (9.34) は、u_t が白色雑音であるとき、一階の移動平均過程 (MA(1)) に従う。

演習 14 y_t, p_t, m_t の分散を求めよ。次いで、それら分散が α と β の増加に従って、増加するか減少するかをそれぞれ確かめよ。

9.4.4 合理的期待モデルの解法：別解法１

合理的期待の考案者ムース自身は、以下の未定係数法によって解を求める。

1. 内生変数を定数と過去・現在の撹乱項の一次結合（分布ラグ）として表現する。
2. 上の分布ラグ表現を元の式に代入して、恒等式をもとめ、係数比較によって未定係数を求める。

再び、9.4.2節のモデルを例にして、この方法を適用してみよう。まず、物価 p_t と産出量 y_t

の分布ラグ表現

$$p_t = \bar{p} + \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j u_{t-j} \tag{9.35}$$

$$y_t = \bar{y} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j u_{t-j} \tag{9.36}$$

を考える。(9.35) の両辺に条件付期待値オペレータ $E_{t-1}[\,\cdot\,]$ を作用させて、

$$p_t - E_{t-1}[p_t] = \pi_0 u_t \tag{9.37}$$

を得る。(9.25) と (9.23) から m_tを消去し、(9.37) を代入して

$$\alpha(\bar{y} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j u_{t-j-1}) + V + u_t = \bar{p} + \bar{y} + \sum_{j=0}^{\infty} (\pi_j + \phi_j) u_{t-j} \tag{9.38}$$

を得る。これは恒等式である。そこで、撹乱項の系列について係数比較をすると、

$$\bar{p} = V - (1-\alpha)\bar{y} \tag{9.39}$$

$$\pi_0 + \phi_0 = 1 \tag{9.40}$$

$$\pi_{j+1} = \alpha\phi_j - \phi_{j+1} \quad (\forall j \geq 0) \tag{9.41}$$

が成り立つ。[8]また、(9.24) と (9.36)、(9.37) を連立させて得られるもう一つの恒等式

$$\bar{y} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j u_{t-j} = y^* + \beta\pi_0 u_t \tag{9.42}$$

について係数比較を行って、

$$\bar{y} = y^* \tag{9.43}$$

$$\phi_0 = \beta\pi_0 \tag{9.44}$$

$$\phi_j = 0 \qquad (\forall j \geq 1) \tag{9.45}$$

を得る。これまでの係数比較の結果をまとめて、

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\beta} \tag{9.46}$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha\beta}{1+\beta} \tag{9.47}$$

$$\pi_j = 0 \qquad (\forall j \geq 2) \tag{9.48}$$

$$\phi_0 = \frac{\beta}{1+\beta} \tag{9.49}$$

これらを分布ラグ表現(9.35) と (9.36) に代入すると、前の節の解(9.32)、(9.33)、(9.34) を得る。

[8]係数比較ができるのは、$\{u_t\}$ に系列相関がないという仮定 4 による。数学的には、共分散は確率変数の空間で内積と考えられる。よって、仮定 4 の下で $\{u_t\}$ が直交系になることによる。

9.4.5　合理的期待モデルの解法：別解法２

合理的期待モデルの解法にはもう一つある。それは、内生変数を過去の内生変数と撹乱項の系列の一次結合と考えて、未定係数法を適用するというものである。

時系列解析の用語を使って、この解法と9.4.4節の解法を比較すると、前者が自己回帰移動平均表現（ARMA 表現）、後者が移動平均表現（MA 表現）に従って未定係数法を行うといってよい。通常、自己回帰移動平均表現（ARMA 表現）は、内生変数と撹乱項のラグの次数を有限にとる。未定係数法を適用するとき、ラグの有限な次数のとり方が適当でないと、誤った解を導出する可能性がある。

演習 15　9.4.2節のモデルにこの解法を適用してみよ。まず、(9.25) を (9.23) に代入して、m_tを消去した体系を考え、

$$p_t = \psi_1 y_{t-1} + \psi_2 u_t + \psi_3 u_{t-1} + \psi_4 y^* + \psi_5 V \tag{9.50}$$

$$y_t = \xi_1 y_{t-1} + \xi_2 u_t + \xi_3 u_{t-1} + \xi_4 y^* + \xi_5 V \tag{9.51}$$

とおいてみよ。

9.5　合理的期待モデルとバブル

これまで、合理的期待を考慮した経済モデルが内生変数の将来の期待値を含まないとき、比較的簡単に誘導型が導出され、MA もしくはMAX(Moving Average with eXogenous variables) モデルとして表現されることを学んだ。MA モデルは定常性が保証される時系列モデルであり、内生変数の動きは過去の確率ショックの加重和であり、ある条件が満たされるときAR モデルに変形でき、過去の内生変数の加重和と現時点のショックの和とも考えられる。また、MAX モデルはMA モデルに外生変数の動きを考慮したものと考えられる。

さて、内生変数の将来の期待値を含む場合どんなことが起こるのであろうか。それを考えるため、以前扱ったインフレのケーガン・モデルを取り上げよう。このモデルは

$$\frac{M_t}{P_t} = \exp\left[-\alpha\left(\frac{E_t[P_{t+1}] - P_t}{P_t}\right)\right] \tag{9.52}$$

これは、

$$p_t - \frac{\alpha}{1+\alpha}E_t[p_{t+1}] = \frac{1}{1+\alpha}m_t \tag{9.53}$$

という一般型に変形できた。

ここで、両辺にE_tをかけて、予想価格についての方程式を得ようとすると、

$$E_t p_t - \frac{\alpha}{1+\alpha}E_t[p_{t+1}] = \frac{1}{1+\alpha}E_t m_t \tag{9.54}$$

が得られる。これより、$E_t p_{t+1}$を求めるのは得策ではない。そこで、(9.53) において将来の向かって逐次代入

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\alpha}{1+\alpha}E_t[p_{t+1}] + \frac{1}{1+\alpha}m_t \\ &= \frac{\alpha}{1+\alpha}E_t\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}E_t[p_{t+2}] + \frac{1}{1+\alpha}m_{t+1}\right) + \frac{1}{1+\alpha}m_t \\ &= \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 E_t[p_{t+2}] + \frac{1}{1+\alpha}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha}E_t m_{t+1} + \frac{1}{1+\alpha}m_t \\ &= \cdots \end{aligned}$$

で、$\frac{\alpha}{1+\alpha}$が 1 より小さいことを考えて、

$$p_t = \frac{1}{1+\alpha}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i E_t[m_{t+i}] \tag{9.55}$$

という解が得られる。これを前方解とよぶ。これは、m_tが$\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^t$のオーダーで発散することがないとき、有界な値をとる。この解は、非同次差分方程式の特解に相当する。確かに、非同次項m_tと核$\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^t$のたたみ込みになっている。

(9.52) の解はほかにも存在する。これをみてみよう。まず (9.53) を非同次差分方程式とみなし（E_tがついてるじゃないか、というカタイことはこの際いわない）て、とりあえず対応する同次差分方程式

$$E_t w_{t+1} - \frac{1+\alpha}{\alpha}w_t = 0 \tag{9.56}$$

も (9.53) を満たすはずである。よって、「予想誤差」

$$u_{t+1} = w_{t+1} - E_t w_{t+1} \tag{9.57}$$

を定義する。[9](9.56) と (9.57) から

$$w_{t+1} - \frac{1+\alpha}{\alpha}w_t = u_{t+1} \tag{9.58}$$

という条件付期待値を形式的に含まない、非同次差分方程式が得られる。この解は

$$w_t = C\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^t + \sum_{j=1}^{t}\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{t-j} u_j \tag{9.59}$$

である。（Cは任意定数とする。）これを前に得た結果（特解）と加えて、

$$p_t = \frac{1}{1+\alpha}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i E_t[m_{t+i}] + C\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^t + \sum_{j=1}^{t}\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{t-j} u_j \tag{9.60}$$

[9] $u_t = w_t - E_{t-1}w_t$としなかったことに注意。

を得る。(9.60) の第一項を基本要素という。これは、経済構造の基本的部分に関係している。つまり、ケーガン・モデルでは貨幣供給が直接的に価格を駆動する部分を指す。これに対して、第二項、第三項を、それぞれ決定論的バブル、確率論的バブルという。

以下、それぞれの項をもう少し詳しくみてみよう。まず、第一項は将来貨幣残高の予想値によって定まる。将来要因を割り引くときの比率はもちろん、弾力性パラメターαに依存する。これは、ケーガン・モデルが本来持っている構造だといえる。つぎに、第二項は、$\frac{1+\alpha}{\alpha} > 1$ であることから、任意定数Cがゼロでない限り、発散する。この項も実は、インフレ理論としてのケーガン・モデルが本来持つものである。実際、確率要素ぬきにして、完全予見を仮定しても発散的なインフレ項としての第二項が得られる。最後の第三項は、合理的期待モデルに特有のもので、第二項の決定論的バブルの発散項がどうであろうと、生ずるものである。(9.57) で定義された予想誤差は、数学的には擬イノベーションを形成するものであり、白色雑音と同様の働きをすると考えられる。つまり、第三項の確率論的バブルは、単なる発散ではなく激しく変動する可能性を持つ。この第三項の確率論的バブルは、考慮可能なすべての情報を効率的に用いて形成した期待、合理的期待と実現値の差が累積したものである。

ここで注意すべきは、バブル項はここでの政策変数である名目貨幣供給量から独立になっていることである。つまり、**バブルの発生・消滅を制御することはできない**。

演習 16 上のモデルで、合理的期待の代わりに完全予見を考えるとき、決定論バブルのみが生ずることを確認せよ。($E_t[p_{t+1}]$ を p_{t+1}で置き換えて、解を求める。)

注意 36 直接法でケーガン・モデルを解くと、基本的要素と決定論的バブルが得られ、ムースの未定係数法で解くと、基本的要素と確率的バブルが得られる。また、ルーカスの未定係数法で解くと、基本的要素のみが得られる。

9.6 合理的期待の解の非一意性

これまでふれたように、合理的期待を含む一般形のモデルが、将来の内生変数についての予想値を含まないとき、解が一意的になる。このことは特定のモデルに限ったことではなく一般的に成り立つ。この節では、以前示したルーカス型供給関数を含むモデルマーク 2

$$\begin{aligned} m_t - p_t &= y_t - \gamma(E_{t-1}[p_{t+1}] - E_{t-1}[p_t]) && (9.61) \\ y_t - y^* &= \frac{1}{\delta}(p_t - E_{t-1}p_t) && (9.62) \\ m_t &= \bar{y} + u_t && (9.63) \end{aligned}$$

m_t、p_t、y_t、y^*は上と同様。γ、δはパラメターで、これらは正の定数とする。u_tは撹乱項である。$\bar{y}$は定数とする。

まず、直接法で解いてみよう。(9.62) の両辺に条件付期待値を作用させて、

$$E_t[y_t] = y^* \quad (9.64)$$

となる。(9.61) と (9.63) によって

$$(p_t - E_{t-1}p_t) + (y_t - E_{t-1}y_t) = u_t \tag{9.65}$$

(9.64) を考えて、

$$y_t = y^* + \frac{1}{1+\delta}u_t \tag{9.66}$$

である。まず、生産量については解の非一意性の問題が起こりそうにないことは、わかった。

つぎに、物価p_tを考える。生産量に付いての解(9.66) と m_t を消去した式(9.65) から

$$p_t - \gamma(E_{t-1}p_{t+1} - E_{t-1}p_t) = \bar{m} - y^* + \frac{1}{1+\delta}u_t \tag{9.67}$$

この式に、条件付期待値を再び作用させて整理すると、

$$E_{t-1}p_{t+1} - \frac{1+\gamma}{\gamma}E_{t-1}p_t = -\frac{1}{\gamma}(\bar{m} - y^*) \tag{9.68}$$

これを $E_{t-1}p_t$をΠ_tのように考えて[10]、解くと

$$E_{t-1}p_t = \bar{m} - y^* + A\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)^t \tag{9.69}$$

A は差分方程式の基本解の任意定数である。この式を (9.67) に代入して、

$$p_t = \bar{m} - y^* + \frac{\delta}{1+\delta}u_t + A\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)^t \tag{9.70}$$

を得る。ここで得られた解は、以前のルーカス型供給関数のモデルマーク１の解と異なり、任意定数が含まれるという意味で一意性を失っている。

演習 17 上のルーカス型供給関数のモデルマーク２をムース流の未定係数法で解いてみよ。

さて、解が一意でないとしてそれをいかに回避するかが問題となる。(9.70) をみて気づくのは、前節の決定論的バブル項に対応する項の存在である。確かに、この項が非一意性の元凶である。そこで、経済モデルは安定的なものでなければならない、つまり発散するものであってはならない、という基準を設けて解のクラスを制限することを考える。これを最初に考えたのは、ブランチャードであろう。とにかく、発散しない条件は明らかに $A = 0$ でありその条件の下で、

$$p_t = \bar{m} - y^* + \frac{1}{1+\delta}u_t \tag{9.71}$$

が得られる。この解は、明らかに初期条件その他の要因に依存せず一意といえる。

演習 18 すぐ前の演習で解いた解についても発散しないような条件をつけて、解が (9.71) と一致するか否かを調べよ。

[10] 条件付期待値の添字 $t-1$ は動かさない。

9.7 合理的期待仮説の検証

合理的期待仮説は、理論にとっての仮説であり経験的にテストされるものである。ここでは、時系列解析の手法を利用した検証方法を述べる。

時系列解析を用いる理由は、時系列モデルが本来最適予測を目的とするものであるため、時系列解析による推定量を合理的期待の代理変数とすることが正当化されるからである。

9.7.1 合理的期待仮説と時系列モデル

すでに述べたように、期待仮説としての合理的期待は、情報集合(期待を形成する時点に既知とされる確率変数の集合と考えてよい)を所与とする、条件付期待値として定義される。たとえば、y_tの1期先の合理的期待y^e_{t+1}は、情報集合を$I_t = \{y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\}$を所与とする、

$$y^e_{t+1} = E[y_{t+1}|\, I_t] \tag{9.72}$$

と表わされる。[11]

一方、時系列モデルとしてのy_tのAR過程(あるいはVAR過程)は

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{9.73}$$

とかける。ε_tは白色雑音である。

このモデルを基礎とした、y_{t+1}の合理的期待$E[y_{t+1}|\, y_t, y_{t-1}, \ldots]$は

$$\Phi_1 y_t + \cdots + \Phi_p y_{t-p+1} \tag{9.74}$$

で表わされることは、若干の計算でわかる。

よって、データから推定された

$$y_t = \hat{\Phi}_1 y_{t-1} + \cdots + \hat{\Phi}_p y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{9.75}$$

を用いて、予測

$$y^e_{t+1} = \hat{\Phi}_1 y_t + \cdots + \hat{\Phi}_p y_{t-p+1} \tag{9.76}$$

を構成し、これを合理的期待の代理変数として代入すれば、合理的期待を含むモデルは最終的に観察される変数のみからなるモデルとなり、通常の推定・検定といった統計分析が可能となる。[12]

---

[11] この節では、多変量と1変量を区別して書いていないが、上の表記をベクトル記法とみなせば、多変量についても概ね同じと考えてよい。

[12] (9.75)から(9.76)を導くのは、形式的には、t期以降のε_tをゼロとおき、y^e_tを求め、これをさらに1期ずらした(9.75)のy_tに代入しy^e_{t+1}を求めるという逐次代入の操作を繰り返す。こうした手続きの結果が最小分散推定量になることは保証されている。

9.7.2 フィッシャー方程式の検証

フィッシャー方程式は、利子率と期待物価上昇率を結ぶ次の式で示される。

$$i_t = r_t + \pi^e_{t+1} \tag{9.77}$$

ここで、i_tは名目利子率、r_tは実質利子率(推定段階で一定と仮定される)、π^e_{t+1}は期待物価上昇率である。

この方程式を検証するには、まず期待物価上昇率を時系列モデル(AR モデルや ARMA モデル) によって求め、そこから得られる一期先予測をつくり、これを期待物価上昇率π^e_{t+1}のデータとして

$$i_t = \alpha + \beta\pi^e_{t+1} + u_t \tag{9.78}$$

という回帰をおこない、βが 1 となることを帰無仮説として検定を行なえばよい。

9.7.3 先物市場の効率性仮説の検証

先物市場の効率性仮説とは、

1. 完全競争
2. 資金市場が完備している
3. 主体の危険中立的態度

という仮定のもとで、直物レートの合理的期待が先物の市場レートに一致するという仮説をいう。

これは、x_tをt期の直物レート、z_tをt期の先物レートとして、

$$z_t = E[x_{t+2}|\, I_t] \tag{9.79}$$

と表わされる。(二期をえらんだのは任意である。) ただし、I_tは適当に定められた情報集合である。

次に、これを検証する手続きを示す。まず、情報集合を設定する必要がある。ここでは, $I_t = \{x_t, z_t, x_{t-1}, z_{t-1}, \ldots\}$ とする。また、直物・先物レートは次の 2 変量 VAR(1) モデルに従って決まると仮定する。

$$\begin{aligned} x_t &= ax_{t-1} + bz_{t-1} + u_{1t} \\ z_t &= cx_{t-1} + dz_{t-1} + u_{2t} \end{aligned} \tag{9.80}$$

すでに述べた、逐次代入の方法により最小分散推定量としての合理的期待が

$$\begin{aligned} E[x_{t+2}|\, I_t] &= (a^2+bc)x_{t-1} + (ab+bd)z_{t-1} + u_{1t} \\ z_t &= (ac+cd)x_{t-1} + (bc+d^2)z_{t-1} + u_{2t} \end{aligned} \tag{9.81}$$

よって、(9.79) が成立する必要条件は、

$$a^2 + bc = 0 \quad ab + bd = 1 \tag{9.82}$$

である。

よって(9.80)を推定し、係数の制約(9.82)を帰無仮説として検定を行なえばよい。具体的には、制約(9.82)が非線形であることを考慮しながら、尤度比検定、ラグランジュ乗数検定、ワルド検定のいずれかを用いればよい。[13]

9.8 合理的期待仮説の意義

合理的期待仮説は、1960年にMuthが発表してからLucasが70年代に復権するまで、これといって経済学者の注目を集めなかった。[14]Lucasが経済理論に積極的に応用するようになって以降も、極端な古典派的帰結が、すべて合理的期待仮説に帰着されるような乱暴な理解が横行したため、長い間にわたってその意義が冷静に評価されたとは言いがたい。

合理的期待は、講義で説明したように、数学的には単に条件付き期待値である。しかし、そこでの条件が何であるか、また期待値がどのように明示的に表現されるかを決めるモデル自体が非常に重要である。つまり、情報集合をどうするか、モデルを古典派的に設定するのかケインズ派的に設定するのかで、条件付き期待値の具体的表現は異なる。この当然のことが理解されないため、混乱し、時には不毛な議論が経済学者間でかわされたと考えられる。

最近になって、そうした議論が収まり、合理的期待に関するきちんとした理解も進み、前節でふれた実証研究が進むにつれて、合理的期待が疑問視される機会も増えてきた。それは、マクロ的な集計量の変動をみる限り、各経済主体が全員合理的な期待をしているとは思えないという当然すぎる疑問である。

確かに、合理的期待仮説は、モデル内の経済主体がモデルの構造を既知として最適な予測を行うという仮説であるため、自分自身を考えてみて、それがナンセンスと短絡的に結

[13]尤度比検定、ラグランジュ乗数検定、ワルド検定は、実際には以下のようにおこなう。制約が、$\mathbf{R}^p$から$\mathbf{R}^m$への関数$R(\theta)$で

$$R(\theta) = 0$$

とあらわされる。対数尤度を$\ell(y,\theta)$、$S(\theta,y) = \frac{\partial \ell(\theta,y)}{\partial \theta}$（スコア）、$\frac{\partial R(\theta)}{\partial \theta} = H(\theta)$のランクを$m$とする。また、情報行列を

$$I(\theta) = E(\theta) = -E\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial theta'}$$

帰無仮説$H_0:\ R(\theta) = 0$とすると、それぞれの統計量は

$$\begin{aligned} LR &= 2(\ell(\hat{\theta}, y) - \ell(\tilde{\theta}, y)) \\ W &= R(\hat{\theta})'(\hat{H}'\hat{I}^{-1}\hat{H})^{-1}R(\hat{\theta}) \\ LM &= \tilde{S}'\tilde{I}^{-1}\tilde{S} \end{aligned}$$

ここで、$\hat{\theta}$は制約がないときの最尤値、$\tilde{\theta}$を制約つきの最尤値とする。

[14]統計学者の注目を集めたかというと、それが単なる条件付き期待値(MMSE推定量)にすぎないため、そうでもなかった。

論づける向きもいるかもしれないが、上記の疑問は実証研究に基づく、より客観的なものであることに注意する必要がある。[15]

そこで、経済主体の合理性は限定的なものだとする経済学者は増えつつある。この流れはゲーム論をやるものからマクロ経済学をやるものまで及ぶ。しかし、「限定的」という意味は多種多様であり、学習プロセスに重点をおくもの、計算能力自体に制限をおくもの、近似計算で満足するという意味に解釈するものと、例をあげればきりがない。その意味で、合理的期待仮説をいったんうち捨てた後には、茨の道が我々の前に残される。

[15]プロ野球の選手は、ニュートン力学の運動方程式も知らないし、流体力学も知らない（と思う）が、プレーにおけるボールの運動に関する予測は、それらを熟知していると想定して差し支えないほどのものである。ということは、場合によっては、選手のボール予測行動仮説として「力学熟知仮説」は科学的分析上ある段階では有効な仮説として機能する。プロ野球の選手が力学を知るわけはないから、「力学熟知仮説」がナンセンスとするのは、科学的態度ではないのである。