# 講義ノート

伊藤幹夫

平成10年 1月 8日

# Chapter 3

# 乗数・加速度理論の系譜

## 3.1 乗数効果と加速度原理の定義

乗数も加速度原理も比較的よく登場する経済学の概念である。ここで、定義をしておく。

**定義 1** 加速度原理とは、資本財の増分が、完成財あるいはサービスに対する需要の時間変化率に依存することである。

上の定義において、派生需要としての投資財需要は、完成財の需要の変化率に依存するという、投資関数としての側面を強調することもある。（その妥当性は今は問わない。）

加速度原理と資本ストック調整原理を混同しないように。資本ストック調整原理は、企業の利潤最大化行動から導くことができる。それは、投資が望ましい資本ストック水準と現状の資本ストック水準の差の一部を埋めるという形で投資行動を定式化したものである。具体的には、

$$I_t = \alpha(K_t^* - K_{t-1})$$

のようにかかれる。

加速度原理が、資本に関しての限定的な言明であるのに対して、乗数は一般的な概念である。

**定義 2** 乗数とは、ひとつの経済変数の限界的変化が、その変数の構成要素である変数の限界的な変化に対して、何倍になるかの倍数である。

例としては、独立投資の限界変化$\Delta\bar{I}$の所得に対する限界的効果$\Delta Y$は、$\Delta Y = \frac{1}{s}\Delta\bar{I}$であるという投資乗数の理論がある。$s$は貯蓄率である。さらに、乗数は、産業連関表などの多部門モデルに適用ができ、ベクトルの乗数は行列で定義される。

## 3.2 加速度原理の定式化

加速度原理は、$C_t$を$t$期の消費、$I_t$を$t$期の投資として

$$I_t = v(C_t - C_{t-1})$$

あるいは、消費関数を

$$C_t = aY_{t-1} + b$$

のように考えて、

$$\begin{aligned} I_t &= v(C_t - C_{t-1}) \\ &= va(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \end{aligned}$$

のように定式化する。

上の定式化の背後にある、暗黙の仮定として資本の操業度が完全に近いというものがある。

## 3.3 乗数・加速度の相互作用と経済変動

さて、経済変動（あるいは景気変動）は定義してあるが、それが発生するのはどんな状況として定式化されるだろうか。形式的にいってしまえば、変数に二階以上のラグがある動学体系であるときである。つまり、二階以上の差分あるいは微分方程式、もしくは二元以上の連立差分あるいは微分方程式として定式化される場合である。

じつは、乗数効果と加速度原理が組合わさって、はじめてそれが実現する。このことに気がついたのは、サミュエルソン(1939)であるといわれている。彼の着想は、その後ヒックス(1950)が発展させた。一方、サミュエルソン＝ヒックスが差分体系で考えたに対して、グッドウィン(1948,1951)は微分体系で考えた。それとは、独立にフィリップス(1954)、ジョルジュスク-レーゲン(1951)がサミュエルソン＝ヒックスの体系の微分方程式化を考えた。

## 3.4 サミュエルソン(1939)のモデル

基本的には、以下の３式から構成される。

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{3.1}$$

$$C_t = aY_{t-1} \tag{3.2}$$

$$I_t = v(C_t - C_{t-1}) \tag{3.3}$$

ただし、$G_t$は政府支出ならびに独立投資である。$v$は加速度因子である。$a$は貯蓄性向であり、$0 < a < 1$を満たす定数である。

さて、上の３式で内生変数（未知数）とみなされるのは、$Y_t$、$C_t$、$I_t$である。そこで、$C_t$と$I_t$を消去して、

$$Y_t = a(1+v)Y_{t-1} - avY_{t-2} + G_t$$

という二階の非同次差分方程式を得る。なお、以下簡単化のため、

$$G_t = \bar{G} = constant$$

と考える。こうして、定常解を$Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2}$とおいて、$\bar{Y} = \frac{\bar{G}}{1-a}$をもとめ、定常解からの乖離を、$y_t = Y_t - \bar{Y}$とおけば、同次差分方程式、

$$y_t = a(1+v)y_{t-1} - avy_{t-2}$$

を得る。

これが、サミュエルソンのモデルの中核といってよい。

## 3.5 サミュエルソンのモデルの含意

サミュエルソンのモデルの持つ含意をまとめると、

> ふたつのパラメターの値によって解は、発散、発散振動、収束、減衰振動の４っつのパターンに分類される。

このことを確認するためには、上の二階差分方程式の解の分類を行なえばよい。こまかい、固有値の分類をする前に、$a$ と $v$のとる範囲を確認しておく。まず、$a$ は限界消費性向であるからゼロと１の間の実数、$v$は加速度係数で正の実数。

まず問題の方程式が振動解をもつかどうかは、固有値が複素根をもつかどうかであるから、固有方程式

$$\lambda^2 - a(1+v)\lambda + av = 0$$

の判別式から、すでにみたパラメターの動く範囲を考えて、$a(1+v)^2$と$4v$の大小関係に問題が帰着される。

1. $a(1+v)^2 < 4v$のとき振動 (固有根が虚根)
2. $a(1+v)^2 \geq 4v$のとき単調収束あるいは発散 (固有根が実根)

次に振動解に関して減衰か発散は、特性方程式の定数項をみて１との大小関係をみればよい。（振動解のとき、ふたつの根は共役なのでその積は根の絶対値の自乗になる。）つまり、

1. $av < 1$ のとき減衰
2. $av = 1$ のとき単振動
3. $av > 1$ のとき発散

異なるふたつの実根に対する、単調な解に関しての減衰か発散は、実根のときはともに正だから、大きい方の根

$$\frac{a(1+v) + \sqrt{a^2(1+v)^2 - 4av}}{2}$$

が１より大きいか小さいかで決まる。これは、仮に１より小さいとすると、

$$a(1+v) < 2 \quad \text{and} \quad a < 1$$

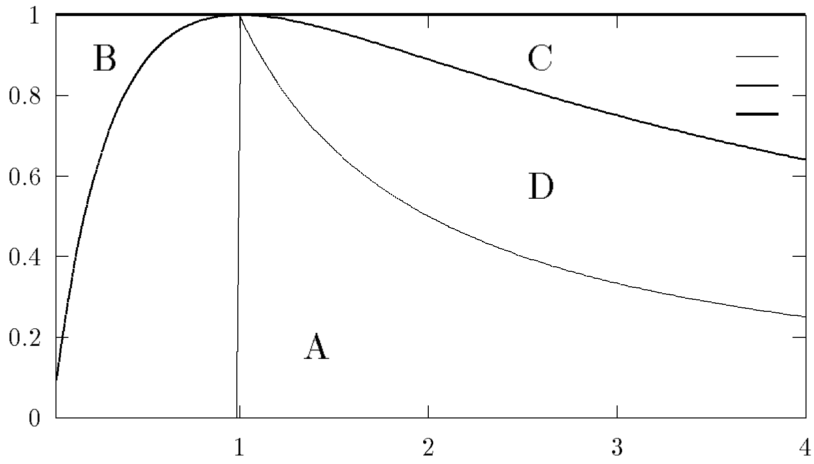
とまとめられる。これは、再びパラメターについての制限から、

$$v < 1 \quad \text{and} \quad a > \frac{4v}{(1+v)^2}$$

となる。単調発散解については、上の$v < 1$を$v > 1$に置き換える。

**注意 1** 共通根の場合も上に含まれる。実際、共通根をとるのは、$a = \frac{4v}{(1+v)^2}$のときであるが、これが、1より大きいかどうかは、結局加速度因子$v$と1の大きさで決まる。

では、パラメターによって経路がどのように分類されるかを、図によって示す。




## 3.6 ヒックスの拡張

サミェルソンのモデルは、永続的な循環を説明するモデルではない。これを改良する方策がいくつか考えられる。ひとつは、ここで説明するように、加速度原理に関しての非線形性、完全雇用天井、独立投資による国民所得の床などを導入する、あるいは、フリッシュのように、外生的ショックを導入して、循環を衝撃の波及過程の一現象ととらえる、などである。

ヒックスのモデルの特徴を列挙すると、

- 完全雇用天井、独立投資による国民所得の床を導入する
- 上のことから、加速度原理の非線形性が導かれる
- 完全雇用天井、独立投資の床、ともに一定率で成長する
- サミュエルソンのモデルでの発散の状態を基調とする

ということになる。

モデルは、

$$Y_t = C_t + I_t + A_t \tag{3.4}$$

$$A_t = A_0(1+g)^t \tag{3.5}$$

$$Y_t^c = Y_0^c(1+g)^t \tag{3.6}$$

$$C_t = cY_{t-1} \tag{3.7}$$

$$I_t = \begin{cases} \gamma(Y_{t-1} - Y_{t-2}) & \text{if} \quad Y_t \leq Y_t^c \text{ and } Y_{t-1} > Y_{t-2} \\ 0 & \text{if} \quad Y_t \leq Y_t^c \text{ and } Y_{t-1} \leq Y_{t-2} \\ Y_t^c - C_t - A_t & \text{if} \quad Y_t > Y_t^c \end{cases} \tag{3.8}$$

上の第(3.5)式、第(3.6)式は床と天井が、同一の自然成長率で成長することを示す。第(3.8)式は、非線形の加速度原理である。

循環のメカニズムを調べるまえに、ヒックスのモデルで加速度原理が働く状況で、産出$Y_t$が成長率$g$で均整成長する可能性を考えてみよう。均整成長は、

$$Y_t = Y_0(1+g)^t$$

と書ける。これが、サミュエルソンのモデル

$$Y_t = (c+\gamma)Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2} + A_0(1+g)^t$$

と両立すると仮定する。ひとつ上の式を次の式に代入して、

$$\frac{Y_0}{A_0} = \frac{(1+g)^2}{(1+g)(1-c+g)-\gamma g}$$

が必要である。これは、パラメターと体系の初期値を縛る。この条件が満たされない限り、ヒックスのモデルの解は、天井か床に向かって動く。（それが標準である。）

さて、体系が加速度原理に従って産出が増大する状態（上の投資関数で最初の場合)、では通常のサミュエルソンのモデルと同様になるが、ヒックスは単調に発散する状態を仮定する。さらに、支配的な固有根の値は自然成長率$g$より大きいとする。そうしないと、天井にぶつかることはない。

これにより、経済が拡大期にあるときは、自然成長率$g$より高い成長率で産出量は拡大していく。完全雇用に対応する「天井」$Y_t^c$を、意図した誘発投資を含む需要$C_t+\gamma(Y_{t-1}-Y_{t-2})+A_t$が越えたとしよう。そのとき、有効需要のうち、消費需要は前期の所得水準に依存する、また独立投資も完全雇用水準の所得と独立だから、意図した投資が修正を受ける。（この論理はよく考えるとおかしい。なぜなら誘発投資も今期の所得には依存しない。）よって、投資は$Y_t^c - cY_{t-1} - A_t$の水準になる。

よって、産出水準は、$Y_t^c$に抑えられる。ここで、すこし、厄介だがその次の期($t+1$期)の誘発投資

$$I_{t+1} = \gamma(Y_t - Y_{t-1}) = \gamma(Y_t^c - Y_{t-1})$$

を考えると有効需要$I_{t+1} + C_{t+1} + A_{t+1}$が、自然成長率で成長する完全雇用水準の産出の$t$期水準を上回ることがある。

$$\gamma(Y_t^c - Y_{t-1}) + A_{t+1} > (1-c)Y_t^c$$

のときである。（貯蓄<投資である。）産出水準は、結局２期間にわたり完全雇用水準に抑えられる。

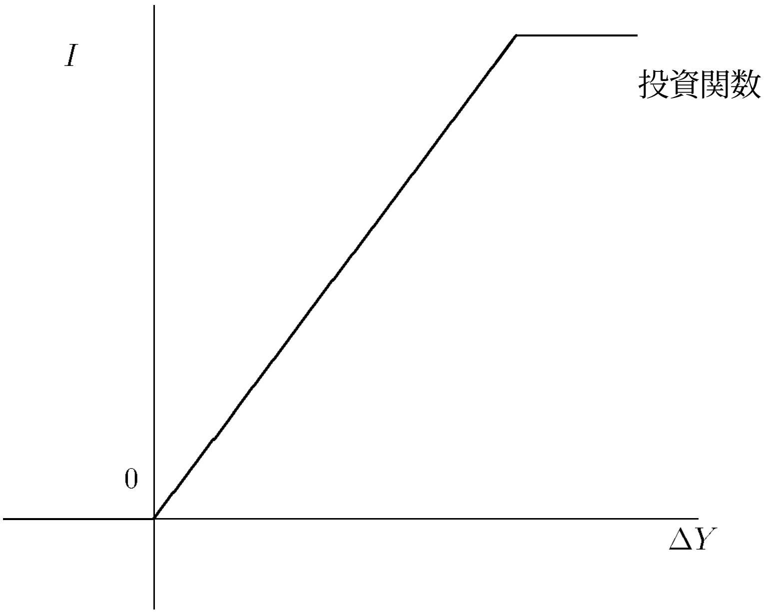



図 3.1: ヒックスの床-天井モデルの投資関数

この段階で非線形加速原理により誘発投資がゼロになり、下方反転が生ずる。以降、$Y_t < Y_{t-1}$が持続する。このとき体系は、加速度原理が働かず、

$$Y_t - cY_{t-1} = A_0(1+g)^t$$

に従って動く。

これの解は、簡単に確認できるように、

$$Y_t = (Y_0 - A_0)c^t + A_0 \sum_{\tau=0}^{t} (1+g)^{(t-\tau)} c^\tau$$

第１項は、$t$ の増大にしたがって減少しながらゼロに近づく。（限界消費性向$c$が１より小さいから。）これに対して、第２項は

$$\begin{aligned} A_0 \sum_{\tau=0}^{t} (1+g)^{(t-\tau)} c^t &= A_0(1+g)^t \sum_{\tau=0}^{t} \left(\frac{c}{1+g}\right)^\tau \\ &= A_0(1+g)^t \frac{1-\left(\frac{c}{1+g}\right)^{t+1}}{1-\left(\frac{c}{1+g}\right)} \\ &= A_0 \frac{(1+g)^{t+1} - c^{t+1}}{1+g-c} \end{aligned}$$

となり、$t$ の増大にしたがって $A_0(1+g)^t$に近づく。

結局、床であるこの経路に近づく過程で、産出水準は再び増加を開始し、加速度原理が働き拡大過程に転ずる。

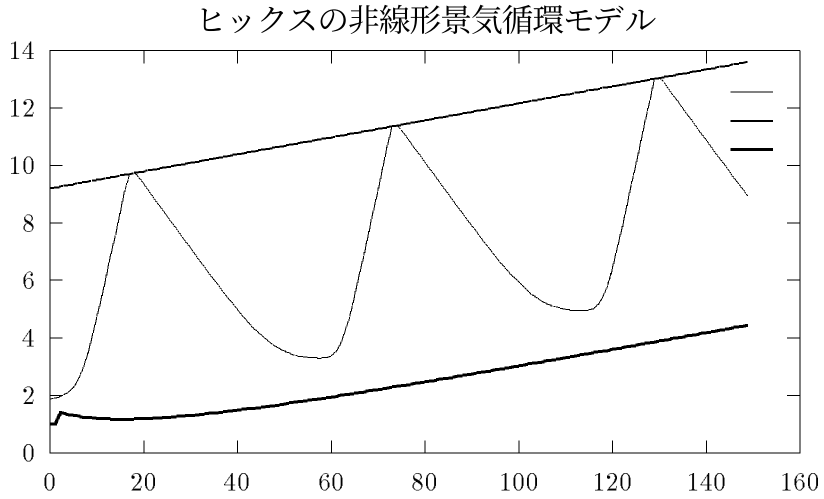



図 3.2: ヒックスの成長循環

数値例は、消費性向$c = 0.8$、自然成長率$g = 0.03$、加速度係数$\gamma = 2.5$、独立投資の初期値$A_0 = 1.0$、完全雇用国民所得の初期値$Y_0^c = 10000$の仮定のもとで計算した。グラフは、水準を対数変換してある。

## 3.7 不規則衝撃の導入によるサミュエルソンのモデルの改良

フリッシュ(1933)は、移動平均の結果、白色雑音から見かけ上循環的な系列が得られることに着目した。以下、フリッシュのアイデアをサミュエルソンのモデル上で考える。

そこで、サミュエルソンのモデルの誘導型である二階の差分方程式に、系列相関のない確率項$u_t$を導入する。

$$y_t = a(1+v)y_{t-1} - avy_{t-2} + u_t$$

これは、二階の自己回帰過程とよばれるもので、ラグ作用素$L$を用いて、

$$y_t = \frac{1}{1 - a(1+v)L + avL^2} u_t$$

と書ける。右辺は、元々の差分方程式が安定であるかぎり、確率項の無限移動平均として表現される定常過程になることが示せる。（なんとなれば、根を$\lambda_1,\ \lambda_2$とおいて部分分数展開する。）

## 3.8 乗数・加速度モデルの連続型

### 3.8.1 ジョルジュスク-レーゲンのモデル

ジョルジュスク-レーゲン(1951)はサミュエルソンのモデルを自然な形で微分モデルにした。

まず、有効需要の式は同一。

$$y = c + I + g$$

次に、加速度原理の式、$I_t = v(c_t - c_{t-1})$を、$\dot{c} \approx (c_t - c_{t-1})$として

$$I = \beta' \dot{c}$$

と表現する。さらに、消費関数$c_t = \alpha y_{t-1}$を$y_{t-\theta} \approx y - \theta \dot{y}$を考慮して、

$$c = \alpha y - \alpha' \dot{y}$$

とする。

ここで、$0 < \alpha \leq 1$かつ$\alpha' > 1, \quad \beta' > 0$とする。

上のモデルを

$$\begin{aligned} t &= \frac{\alpha' T}{\alpha} \\ \beta &= \frac{\alpha \beta'}{\alpha'} \\ y &= Y + \frac{g}{1-\alpha} \\ c &= C + \frac{\alpha g}{1-\alpha} \end{aligned}$$

という変数変換を考えると、

$$\begin{cases} \alpha \dot{Y} = \alpha Y - C \\ \beta \dot{C} = Y - C \end{cases} \tag{3.9}$$

という体系を得る。

### 3.8.2 フィリップスのモデル

$$Y^d = C + I + A$$

$$C = aY^s$$

$$\frac{dY^s}{dt} = -\ell(Y^s - Y^d)$$

$$I = v\frac{dY^s}{dt}$$

ここで、タイムラグを導入。$I \neq v\frac{dY^s}{dt}$である。

$$\frac{dI}{dt} = -h(I - v\frac{dY^s}{dt})$$

調整スピード $h$ の導入。未知数$Y^s, Y^d, I, C$

$$\frac{dY^s}{dt} = -\ell Y^s + \ell(aY^s + I + A)$$

$$I = \frac{1}{\ell}\frac{dY^s}{dt} + (1-a)Y^s - A$$

両辺微分して

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\ell}\frac{d^2Y^s}{dt^2} + s\frac{dY^s}{dt}$$

ただし$s = 1 - a$

$$\frac{d^2Y^s}{dt^2} + (\ell s + h - h\ell v)\frac{dY^s}{dt} + h\ell sY^s = h\ell A$$

定常点$\bar{Y} = \frac{\bar{A}}{s}$、これは$Y^s = Y^d$

以下$m = h + \ell s - h\ell v$、$n = h\ell s$とおく。

### 3.8.3 グッドウィンの資本ストック調整モデル

ここでは、グッドウィンの線形微分モデルをとりあげる。[1]モデルとしては、まず貯蓄は

$$S = sY - B \qquad (1 > s > 0,\ B > 0)$$

に従う。投資は、資本ストック調整原理にもとづく。つまり望ましい投資を

$$K^e = vY \qquad (v > 0)$$

という資本産出係数$v$によって決まるものとし、投資は望ましい資本ストックと現実の資本の$100 \times \frac{1}{\theta}$%を埋めるものとして

$$\theta I = K^e - K \qquad (\theta > 0)$$

という投資関数を考える。

また、産出の変化量は、投資と貯蓄のギャップに比例すると仮定する。

$$\varepsilon\dot{Y} = I - S \qquad (\varepsilon > 0)$$

[1]Goodwin, R. M., "Secluar and Cyclic Aspects of the Multiplier and the Accelerator," in *Income, Employment and Public Policy*, R. M. Musgrave, Norton, 1948をみよ。

当然、

$$I = \dot{K}$$

である。

以上から、

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \frac{1}{\theta\varepsilon}(v - s\theta)Y - \frac{1}{\theta\varepsilon}K + \frac{1}{\varepsilon}B \\ \dot{K} &= \frac{v}{\theta}Y - \frac{1}{\theta}K\end{aligned}$$

が導かれる。

この体系の定常均衡は、

$$Y^* = \frac{1}{s}B, \qquad K^* = \frac{v}{s}B$$

となる。

特性方程式は、

$$f(\lambda) = \theta\varepsilon\lambda^2 - (v - \theta s - \varepsilon)\lambda + s = 0$$

である。詳しい根の分類は演習に残すとする。ただし、

$$v = \theta s + \varepsilon$$

のとき、固有値は純虚根となる。

### 3.8.4 連続型線形モデルのまとめ

以上、ジョルジュスク-レーゲンとフィリップス、グッドウィンのモデルを簡単に紹介したが、パラメターの値によって、解が基本的に四つのパターンに分類されるという特性は、サミュエルソンのモデルと変わらない。

加速度原理の表現方法や、ラグを含む消費関数$C_t = cY_{t-1}$の扱いが困難であったかどうかは別として、順番としては連続型線形モデルがあとにくる。

## 3.9 グッドウィン (1951) の非線形加速度因子モデル

乗数・加速度型の景気循環モデルの最後を飾るのは、グッドウィンによる非線形景気循環モデルを紹介する。

グッドウィン(1951)の論文は、簡単なモデルから複雑なモデルを導出する。それにより、非線形の投資関数の意味を明らかにする。

### 3.9.1 モデル１

消費関数は

$$C = \alpha Y + \beta \tag{3.10}$$

有効需要は、

$$Y = C + \dot{K} \tag{3.11}$$

$\dot{K}$は粗投資と考えられる。

また、望ましい資本ストック水準$R$は、資本産出比率$\gamma > 0$により、

$$R = \gamma Y \tag{3.12}$$

と書かれる。

(3.10) と (3.11) から消費$C$を消去して、

$$Y = \frac{\beta + \dot{K}}{1 - \alpha} \tag{3.13}$$

を得る。

投資$\dot{K}$が階段関数なら、産出も階段関数になる。一方、資本$K$は鋸型の形状の関数になる。

ここで、次のような極端な投資関数を考える。これは、(3.12) で考えた望ましい資本ストック水準$R$を用いて、

$$\dot{K} = \begin{cases} \kappa_1 & \text{if} \quad K < R \quad \text{資本不足} \\ 0 & \text{if} \quad K = R \quad \text{適正資本} \\ -\kappa_2 & \text{if} \quad K > R \quad \text{資本過剰} \end{cases} \tag{3.14}$$

$\kappa_1$、$\kappa_2$は正の定数である。$\kappa_2$は一定の減価償却率と解釈される。（$K$が粗投資としたことを想起せよ。）ここで、

$$\kappa_1 > \kappa_2 \tag{3.15}$$

を標準的な場合と考え、この仮定を以降保持する。

(3.12)、(3.13)、(3.14) から

$$R = \begin{cases} R_1 = \gamma(\beta + \kappa_1)/(1 - \alpha) & \text{if} \quad K < R \quad \text{資本不足} \\ R_0 = \gamma\beta/(1 - \alpha) & \text{if} \quad K = R \quad \text{適正資本} \\ R_2 = \gamma(\beta - \kappa_2)/(1 - \alpha) & \text{if} \quad K > R \quad \text{資本過剰} \end{cases} \tag{3.16}$$

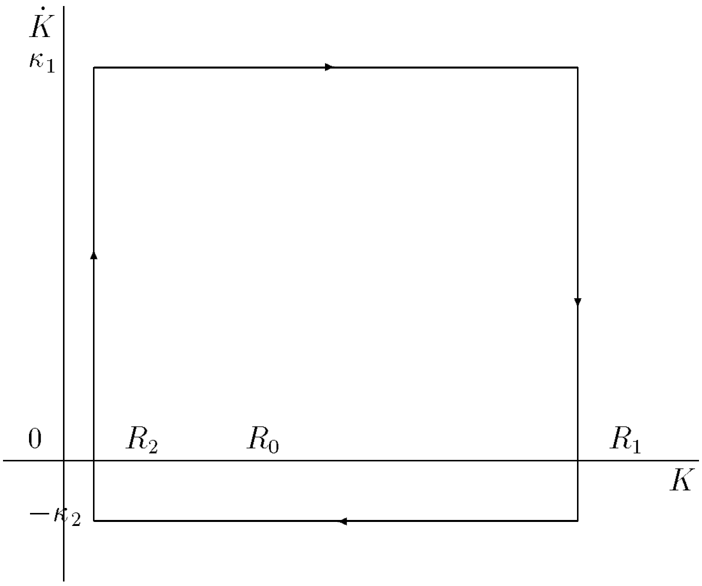



図 3.3: グッドウィンのモデルの位相図１

となる。

以上で、産出と投資の間で動的な関係が結ばれた。ここで、簡単に体系がどう動くかを調べてみよう。

$t = 0$ で $R = R_1$ かつ $R_2 < K < R_1$ としよう。このとき、粗投資は $\dot{K} = \kappa_1 > 0$ になっており、(3.13) から $Y$ は不変であるが、資本ストック $K$ は、$K = R_1$ になるまで増加する。$K = R_1$ が達成されると、その瞬間資本は適正水準となり、$R = R_0$ が成立する。（$R$ がジャンプした。）$K = R_1 > R = R_0$ であるから、この瞬間にも資本過剰の状態になり、$R = R_2$ になる。(3.14) より $\dot{K}$ は $-\kappa_2$ で、資本は、$K = R_2$ になるまで減少を続ける。

$K = R_2$ になると、資本は適正水準で、$R = R_0$ となる。さらに、今 $K = R_2 < R_0 = R$ であるから、資本不足の状態になる。再び $R$ は瞬時に $R = R_1$ となり、資本は $\dot{K} = \kappa_1$ で増加を始める。

以上がモデル１の概要である。このモデルには、ふたつの欠点がある。

1. 投資の不連続性が産出の不連続性に直結している
2. $\kappa_1 > \kappa_2$ の仮定より、不況が長く、好況は短い。これは、観察事実に矛盾する。

第一の欠点を修正する。

### 3.9.2 モデル２

(3.13) を、資本の増加が産出の増加をもたらすには時間の遅れがあるとして、次のように修正する。

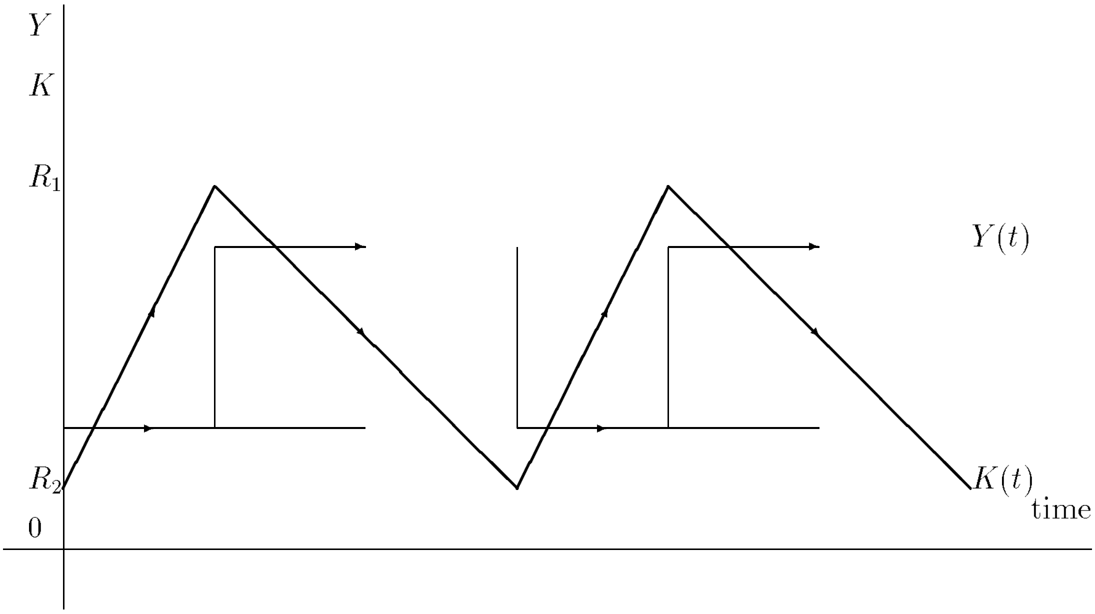



図 3.4: グッドウィンのモデル１の動き

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}(\beta + \dot{K} - \varepsilon\dot{Y}) \tag{3.17}$$

(3.14) と (3.17) を連立させて、

$$\varepsilon\dot{Y} + (1-\alpha)Y = \beta + \kappa_1 \quad \text{if } K < R \tag{3.18}$$

$$\varepsilon\dot{Y} + (1-\alpha)Y = \beta - \kappa_2 \quad \text{if } K > R \tag{3.19}$$

さて、$t = t_1$で不況が終わったとすると、下の式から上の式に従う状態に体系が構造を変化させる。上の式の解は

$$Y(t) = \frac{\beta+\kappa_1}{1-\beta}\left(1 - \exp\left(\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)\right)\right) + Y(t-1)\exp\left(\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)\right) \tag{3.20}$$

$$= \frac{\beta+\kappa_1}{1-\beta} - \left(\frac{\beta+\kappa_1}{1-\beta} - Y(t_1)\right)\exp\left(\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)\right) \tag{3.21}$$

これは、明らかに微分可能な増加関数でジャンプをしない。

次に、(3.14) を修正して、投資関数が独立変数に対して連続になるように修正を加える。そのために、投資の一部は産出の変化に誘発されるという加速度原理を導入する。そのとき、$K = R$から$K = \gamma Y$、これを微分して$\dot{K} = \gamma\dot{Y}$が得られるが、これは、上限と下限を持たないので、われわれの目的には不向きといえる。そこで、部分的に$\dot{K} = \gamma\dot{Y}$、かつ上限と下限をもつ非線形な微分可能な関数$\psi(\dot{Y})$ を導入する。さらに、独立投資$L$を考え、(3.14) を

$$\dot{K} = \psi(\dot{Y}) + L \tag{3.22}$$

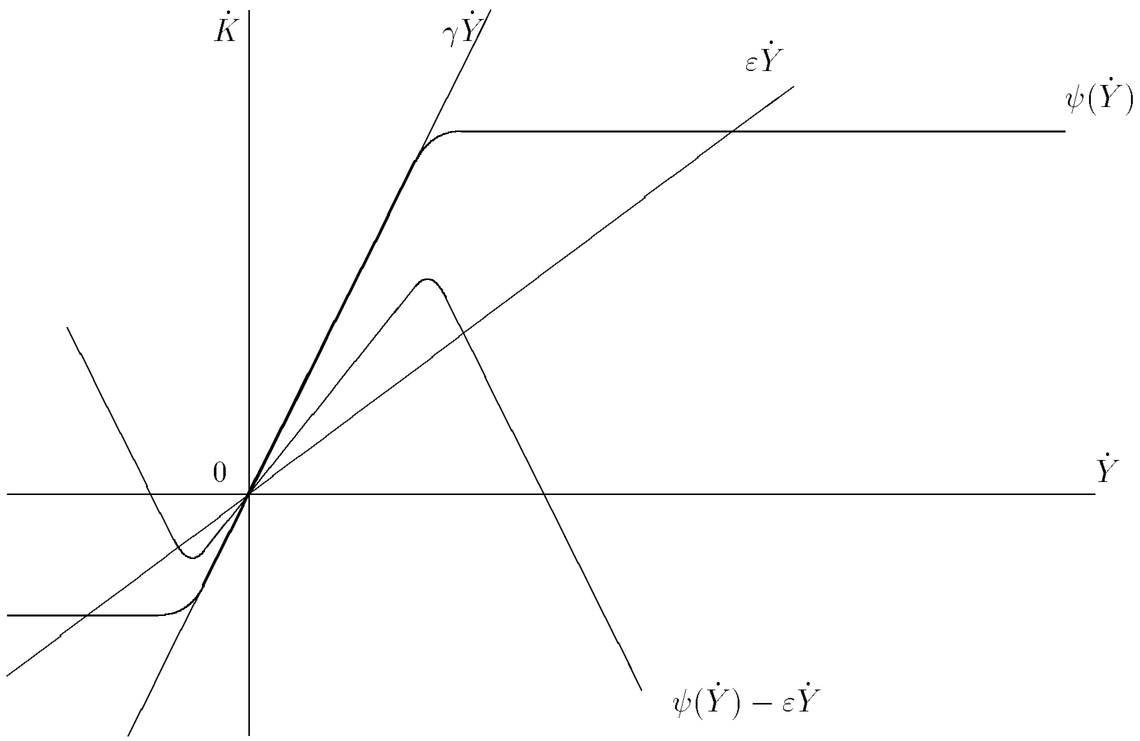



図 3.5: グッドウィンの非線形加速度因子

と修正する。

これにより、(3.13) は今度は、

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}\left[\beta + L + \psi(\dot{Y}) - \varepsilon\dot{Y}\right] \tag{3.23}$$

を得る。

以上で、産出$Y$は連続的に変化するモデルが得られた。ただし、産出量の変化$\dot{Y}$はジャンプする。

### 3.9.3 モデル3

最後に、産出の変化$\dot{Y}$に関するラグを導入すると、$\dot{Y}$の不連続性を回避することができる。

$$\varepsilon\dot{Y}(t) + (1-\alpha)Y(t) - \psi(\dot{Y}(t-\theta)) = \beta + L \tag{3.24}$$

これは微分差分混合方程式である。しかし、後のことを考えて、次の同値な体系を考える。

$$\varepsilon\dot{Y}(\tau+\theta) + (1-\alpha)Y(\tau+\theta) - \psi(\dot{Y}(\tau)) = \beta + L \tag{3.25}$$

これを、$Y(\tau+\theta) \approx Y(\tau) + \theta\dot{Y}(\tau)$ を用いて微分方程式に変換する。

$$\varepsilon\theta\ddot{Y}(\tau) + (\varepsilon + (1-\alpha)\theta)\dot{Y}(\tau) - \psi(\dot{Y}(\tau)) + (1-\alpha)Y(\tau) = \beta + L \tag{3.26}$$

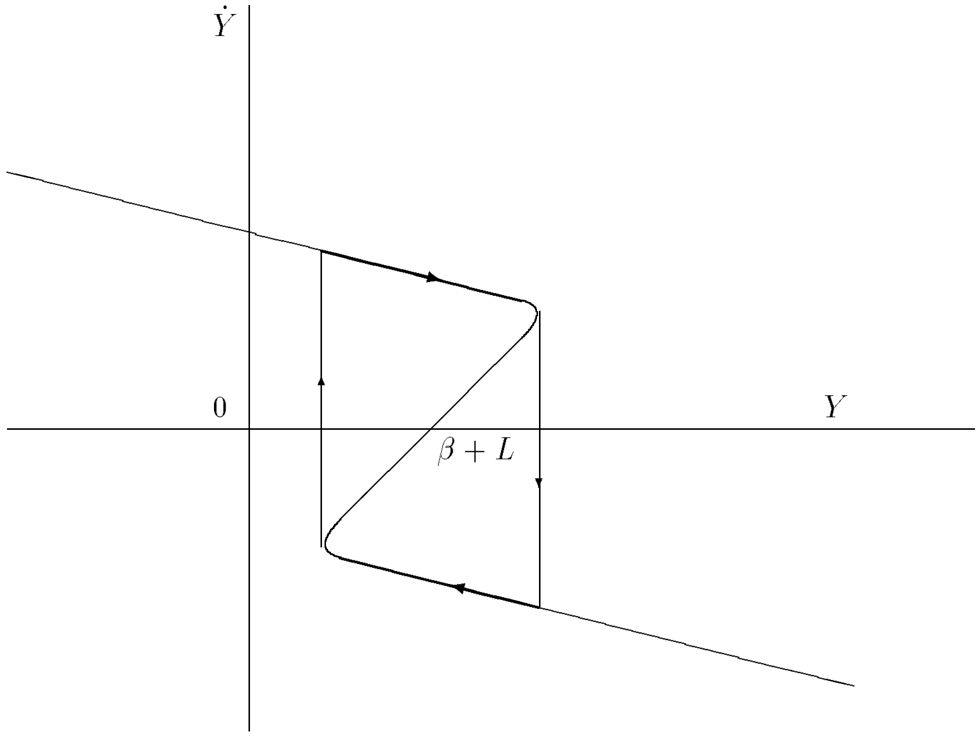



図 3.6: グッドウィンのモデルの位相

$\beta + L$が定数であることを考え、

$$y = Y - \frac{\beta + L}{1 - \alpha}$$

という変換を考えると

$$\varepsilon\theta\ddot{y}(\tau) + (\varepsilon + (1-\alpha)\theta)\dot{y}(\tau) - \psi(\dot{y}(\tau)) + (1-\alpha)y(\tau) = 0 \tag{3.27}$$

を得る。

　最後に、

$$x = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\varepsilon\theta}}y \qquad t = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\varepsilon\theta}}\tau$$

という変換により、

$$\ddot{x} + \chi(\dot{x})\dot{x} + x = 0 \tag{3.28}$$

というレイリー型の微分方程式を得る。ここで、

$$\chi(\dot{x}) = \frac{[\varepsilon + (1-\alpha)\theta]\dot{x} - \psi(\dot{x})}{\dot{x}\sqrt{\frac{1-\alpha}{\varepsilon\theta}}}$$

である。

$$\varepsilon + (1-\alpha)\theta < \gamma$$

のとき、極限閉軌道をもたらす。

極限閉軌道の存在については、次の定理がある。

**定理 1**

$$\ddot{x} + f(x,\,\dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$$

は、次の条件をみたすとき安定な極限閉軌道を持つ。

1. ある $a > 0$ と $m > 0$ があって、$|x| \geq a$ かつ $|z| \geq a$ となるすべての $(x, z)$ について、$f(x,\,z) \geq m$
2. $f(0, 0) < 0$
3. 任意の $y \neq 0$ で、$yg(y) > 0$
4. $|x| \to \infty$ のとき、$G(x) \to \infty$。ただし、$G(x) = \int_0^x g(u)du$。
5. $f(x, z)$、$g(x)$ はともに、連続かつリプシッツ条件を満たす。

# 付録：資本ストック調整原理

ここでは、調整費用によってストック調整原理にもとづく投資関数を導いてみよう。（数学に詳しくない読者は、飛ばして読んで差し支えない）

以下の議論はアイスナー＝ストルッツによる。

**仮定 1** 利潤は、利潤関数 $p = \alpha K - \beta K^2$ によって表現される。

ただし、$K$ は資本、$p$ は利潤を表す。

**仮定 2** 投資費用は、$c = \gamma \left(\frac{dK}{dt}\right)^2 + k\left(\frac{dK}{dt}\right)$ で表される。

初期値を $K_0$ として、企業はキャッシュ・フローの割引現在価値を最大にするように資本ストックの蓄積を計る。つまり、$r$ を利子率として

$$\text{maximize} \quad \int_0^\infty e^{-rt}(p-c)dt$$

である。

これを、変分法を適用してオイラー方程式を求めて、最適な資本ストック水準と、最適な資本蓄積計画を求めると、

$$K^* = \frac{\alpha - \gamma k}{\beta}$$

$$K = \left(K_0 - \frac{\alpha - \gamma k}{\beta}\right)\exp\left(\left[r - \frac{\sqrt{r^2 + 2\beta}/\gamma}{2}\right]t\right) + \frac{\alpha - \gamma k}{\beta}$$

ストック調整原理

$$\frac{dK}{dt} = \delta(K^* - K)$$

が成立していることが、確かめられる。ここで、$\delta$は調整速度で

$$\delta = \frac{\sqrt{r^2 + 2\beta/\gamma}}{2} - r$$

と表され、

$$\frac{d\delta}{dr} < 0 \quad \frac{d\delta}{d\gamma} < 0 \quad \frac{d\delta}{d\beta} > 0$$

が成立する。