KEIO ECONOMIC SOCIETY DISCUSSION PAPER SERIES No. 06-6

KESDP 06-6

市場効率性の時変構造*

伊 藤 幹 夫† 杉 山 俊 輔‡

2007 年 3 月 12 日

概要

本稿は，時変 AR モデルを用いて各時点の収益率の自己相関の変化を計測し，株式市場の市場効率性の変化を分析した．その結果，株式市場の市場効率性は日米ともに時間を通じて一定ではなく，収益率の自己相関には時変構造が存在するという強い証拠が得られた．また日米比較では，米国のほうが日本よりも相対的に効率的な期間が圧倒的に長かった．

1 序論

株式市場や外国為替市場他の金融市場において，株価，為替レート，その他の金融資産価格は，ランダムウォークしていると言われることがある．これは，いわゆるファンダメンタル情報に加えて，政策の変更に関するアナウンスメント，国際情勢，災害などの情報もふくめて，ありとあらゆる利用可能な新規の情報に対する取引者の思惑に市場が瞬時に反応して，株価に反映させるがゆえに，金融資産価格は，予想を許さない動きをするという含意をもっている．このことは次に述べる Fama の意味での市場効率性の概念の基礎を形成する．なお，パレート最適性を基礎とする，財市場の効率性の概念と大きく異なることに注意しよう．

* 本稿は，内部での議論を行なうための未定稿の段階にあるディスカッション・ペーパーである．著者の承諾なしの引用・複写は差し控えていただきたい．KEIO ECONOMIC SOCIETY DISCUSSION PAPER のいくつかは，`http://www.econ.keio.ac.jp/org/kes/ja/pub/pdis.htm` より無料で入手可能である．

† 慶應義塾大学，経済学部，ito@econ.keio.ac.jp

‡ 慶應義塾大学, 経済学研究科, sugiyama@2006.jukuin.keio.ac.jp, `http://2006.jukuin.keio.ac.jp/sugiyama/`

新規情報に対する，市場価格の即時的な反応をもって，金融資産市場を考えるわけだが，著名な Fama (1970)[pp.383] の展望論文にある，「価格が利用可能な情報を完全に反映させる市場を効率的とよぶ」(*A market in which prices always "fully reflect" available information is called "efficient."*) という表現が，市場効率性の定義として広く採用されている．市場が効率的であるという仮説を効率的市場仮説 (efficient market hypothesis) と呼ぶが，この仮説が現実に妥当するかどうかを巡り，これまで膨大な数の研究論文が著されてきた．

初期の研究においては，Fama (1970) が総括するように，現在からみると粗雑な枠組みにおいて，概ね効率的という結果を報告する論文が多かった．その後，推定方法について様々な工夫がされるようになって，多くのアノマリーが報告されるようになり，効率的市場仮説の成立に懐疑的な立場をとる研究者も増えている．また，多くのアノマリーの報告から，1980 年代後半から，1990 年代前半にかけて，株式市場に心理的な考察を持ち込むべきだという考えに基づき，行動ファイナンスという研究分野も登場している．有力な研究者も Malkiel (2004)[ch.11] のように効率的市場仮説を徹底的に堅持する立場のものもいれば，Shiller (2005)[ch.10] のように効率的市場仮説に懐疑的なものいる．効率的市場仮説の正否について，現在までのところ決着はついていないし，これからも着くとは筆者には考えられない．

効率的市場仮説の正否に関する，この混沌とも泥沼ともいえる状況について，実は至極当然のこととみなせるともいえる．Fama (1970) が指摘するように，効率的市場仮説は資産価格決定モデルと合理的期待仮説の複合仮説であるがゆえに，データによる検証の結果について学者集団の間でコンセンサスが得られにくいという側面がある．この点をもう少し突っ込んで考えてみるには，効率的市場仮説が形式的には，証券の実際の収益率と（事前に合理的に形成された）期待収益率の間の差が，系統的な誤差とみなされないと表現されることに注意を払う必要がある．

上のことは，効率的市場仮説が，第 1 に条件付期待値として表現される合理的期待の情報集合の採り方に依存すること，第 2 に条件付期待値の背後にある収益率の予測モデル（あるいは資産価格決定モデル）の採り方に依存すること，第 3 に系統的誤差をどの程度の範囲で考えるかに依存するという，確率論的な言明であることを意味する．このことと関係して例えば Summers (1986) は，早い段階で仮説の検証方法は市場が効率的でない場合でも，なかなかそれを棄却できず，検出力が小さいという指摘をしている．結局，雑駁な言い方をするならば，何を明確にすれば仮説が検証されるかについて研究者間にコンセンサスが形成されにくい仮説となっている．

さらに，「利用可能な情報の完全な反映としての市場価格の成立」という Fama の定義に基づく効率的市場仮説の言明それ自体が，自然科学における実証研究の仮説と比較するといかにも内容が茫漠としていることにも問題がある．「利用可能」，「情報」，「完全な反映」，どれをとっても，厳密さに欠けるとの批判を自然科学研究者から受けそうなものばかりである．換言するならば，Lakatos (1978) の言うリサーチ・プログラムとしてみた効率的市場仮説研究は，堅い核 (hard core) 自体がまったく「堅くない」ことに加え，前述の Fama の複合仮説にまつわる検証手続きの統一性のなさは，これまで効率的市場仮説研究に登場した多くの手法が，防御帯 (protect belt) としての役目をそもそも果たしていないといううがった見方も可能なのである．

Merton (1987) は，アメリカにおける効率的市場研究者には，つぎのような行動がみられるという．もし，効率的市場仮説を支持する結果が得られたらアカデミックなジャーナルに投稿して業績を稼ぐ．もし効率的市場仮説を否定する結果が得られたら，自分でそれを利用するか，情報をファンド・マネージャーに売りカネを稼ぐ．これが，効率的市場仮説を支持する結果を生み出しやすいバイアスとなったという．この指摘が真実かどうかは別としても，どちらの結果も出るという，実務家まで拡げた専門家の間ではコンセンサスがまるで形成されないというアメリカの事情を如実に物語る．

以上のような，効率的市場仮説の正否をめぐる研究における研究者間でコンセンサスが形成されない背景には，別の側面も存在する．伝統的な市場効率性の研究ではサンプル期間を固定し，それに対して検定論に基づいて効率的市場仮説の妥当性について明確な結論を出そうとしてきた．しかし，このような接近法では，分析結果がサンプル期間のとり方に強く依存する．例えば，多くの研究がサンプル期間の取り方によっては，定常性（あるいは和分過程程度の非定常性）を基礎とする検証手法の前提そのものの成立があやしくなってしまうということも指摘できる．そのために，市場効率性についての研究は「水掛け論」の様相を呈するという側面があった．また Fama (1991) 以降の市場効率性の研究は，停滞期に入ったと見る人もいる．しかし，筆者は研究者の効率的市場仮説についての関心は持続していると考える．日本においても，釜江 (1999) のように多様な手法で，さまざまな金融資産市場の効率的市場仮説の検証に取り組むものもいれば，蓑谷 (2001) のように，伝統的なランダム・ウォーク仮説の検証を，ARFIMA モデルによる長期記憶を考慮する最近の時系列研究の発展を取り込む形で行なうものもあり，研究は途絶されることなく行なわれている．

効率的市場仮説の成立に関して，白か黒かをはっきり決めることは，ほぼ絶望的と思える．そのことに努力を傾注することは，誤解を恐れずに言えば，徒労である．そこで，Campbell, Lo and Mackinlay (1997)[1.5.2] も指摘していることだが，市場効率性を順序づけるほうが，議論として生産的であると筆者は考える．近年，相対的な効率性を比較するような文献が見られるようになってきたが，時系列データに対して，過去と現在の相対的な市場効率性を比較した研究は，筆者の知る限り存在しない．本稿では市場効率性の連続的な時変構造に注目した実証分析を行なう．すなわち伝統的な文献にはあまり見られなかった,「どの程度効率的か」という視点を入れて時点の異なる市場効率性の比較分析を行なう．

Fama は,「利用可能な情報集合」の量の寡多によって，効率性の程度を三つに分類している．一つ目は弱度の (weak form) 効率性である．弱度の効率性とは，情報を過去の価格のみに限定するもので，過去の価格の持っている全ての情報は現在の価格に十分に反映されており，過去の時系列データを分析することで市場平均を凌駕するような利益を上げられないような状態を指す．二つ目は準強度の (semi-strong form) 効率性である．準強度の効率性においては，情報の範囲を過去の価格以外に，一般に公表されている情報にまで拡大する．例えば金利，企業業績の発表により得られる情報である．三つ目は強度の (strong form) 効率性である．強度の効率性においては，情報の範囲をさらに一般に公表されていない情報にまで拡大する．つまり，ある種の特別な情報を独占的に利用できると考えられる立場にある投資家が，その立場を利用しても市場平均を上回るような大きな利益を上げられない状態である．

本稿では，日米の株式市場における弱度の (weak form) 効率性を分析対象とする．弱度の効率性では，情報集合として過去の系列のみを考えるので，過去の収益率系列を分析しても収益率は予想不可能ということが含意される．もしも収益率に自己相関があったら，来期の収益率は部分的にせよ予想可能となってしまうので，弱度の効率性が成立しているならば，収益率系列には相関が存在しないはずである．よって弱度の効率性を検証するためには，株式収益率の自己相関を調べることが最も直截な方法となる．自己相関を調べるという戦略をとるには，理由がある．前述したように，あまりに込み入った方法での効率性の検証を用いたところで，結局のところ「水掛け論」の輪に加わるだけだという判断を行なった．

ここでは，その考え方を一歩進めて，自己相関の大きさが市場効率性を反映するという考えの下で，時間を通じて市場効率性がどのように変化するかに注目する．株式収益率の自己相関の時変構造を計測する方法としては，時変係数の AR モデルを状態空間モデル (State Space Model) で表現し，カルマン・スムージング (Kalman Smoothing) によって時変 AR 係数を推定する方法を採る．さらに推定された時変 AR 係数に関して統計解析を行なう．

第 2 節では，効率的市場仮説研究の本質的な問題点を整理し，その問題点を改善する方向性

を提示する．第 3 節では，自己相関係数の時変構造を明確にする枠組みとしての，時変 AR モデルの状態空間モデル表現と，それをカルマン・フィルターを使わずに平滑化 (Smoothing) を行なう伊藤 (2006) の推定方法について説明する．第 4 節では，各国の資本市場データを用いた実証分析の結果を報告する．最後の節は，結語にあてる．

2 効率的市場仮説の検証の問題点とその解決法

本節では，効率的市場仮説が本質的には証券価格過程のマルチンゲール性であるという立場にたつ場合の仮説の意味を明確にする．その上で，検証を行なう場合の困難を，理論的な含意に基づくものと，実証手続きに関するものの両面から明確にし，困難にどのように対処すべきかを明確にする．なお，これまでの効率的市場仮説に関わる研究の展望は，目的ではないことに，読者は注意すべきである．

2.1 効率的市場仮説の理論上の問題点

効率的市場仮説を，歴史上最初に提唱したのは誰かという問いは，経済学説史研究者に譲るとして，ほとんどの金融論の研究者が市場効率性の概念を明確に理解しない時点で，効率的市場の中核となるマルチンゲール概念を金融論に導入したのは Samuelson (1965) であろう．

Samuelson はきわめて簡単なモデルと合理的期待形成を前提として，証券価格がマルチンゲールになることを示した．ただし，非常に意地悪な見方をすれば，公正な賭けの系列の数学的な表現としてのマルチンゲールとなるように，ほとんど自明な証券価格モデルと予想形成として条件付期待値を設定している．実際，Samuelson は，自らの単純な議論の意義について，自明だと考える人もいるかもしれないが，議論の出発点にはなると述べている．確かに，金融市場が効率的かどうかは，価格の時系列がマルチンゲール性をもつ確率過程のサンプル過程かどうかによるという考え方は Samuelson に始まるといってよいだろう．

連続型，離散型ともに，任意の確率過程を考えるとき，確率過程 $\{X_t\}$ がマルチンゲールであるとは，

$$(\forall t) \quad X_t \text{は}\ \mathcal{F}_t\ \text{可測で}, E[X_t] < \infty$$

を満たす σ-集合体の増大例 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{N}}$ に対して

$$t_2 < t_1 \Longrightarrow E[X_{t_1}|\mathcal{F}_{t_2}] = X_{t_2}$$

を満たすことであると定義される．以下，簡単化のために離散型の確率過程に限定して議論を進める．

ここで

$$t_2 < t_1 \Longrightarrow \mathcal{F}_{t_2} \subset \mathcal{F}_{t_1}$$

であるとき情報増大列あるいはフィルトレーション (filtration) とよぶ．各時点において対応するフィルトレーションの σ-集合体に 関して X_t が可測であるとき，フィルトレーションに適合するという．さらに上の定義の期待値を定義するための確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は，

$$\mathcal{F}_{t_\infty} := \sigma((\cup)_{t>0}^{\infty}\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{F}$$

とする．フィルトレーションに属する σ-集合体から生成される σ-集合体を含む十分大きな σ-集合体上で確率測度を定義しておく必要がある．これは，より強度の効率的市場仮説を考えるための前提である．

例えば弱度の市場効率性を考える場合，この σ-集合体の増大例 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{N}}$ の各 $\mathcal{F}_t$ が $X_0, X_1, \cdots, X_t$ によって生成される σ-集合体を考えて情報集合と解釈する．直感的に考えると，確率変数の実現値がより多く観察されればされるほど，観察者が直面する事象 (event) がより小さな細分 (partition) として認識されるからである．

相対的により強度の市場効率性を考えるとは，σ-集合体の増大列を生成する確率変数として，効率性の正否が問題となる確率変数以外をどれだけの種類の確率変数を含むかどうかが問題となる．数学的には，より細かいフィルトレーション，つまり

$$(\forall t)\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$$

が成立する 2 つのフィルトレーションに関しての $\{X_t\}$ のマルチンゲール性を考て，それらを，効率的市場仮説の表現だと解釈すると，$\mathcal{G}_t$ に関するマルチンゲール性が強度の効率的市場仮説の成立となる．

マルチンゲールは条件付期待値にのみ依拠した形で定義される概念であるから，確率過程を規定するものとしては非常に弱いものである．実際 $E[u_t] = 0$ である iid 過程 $\{u_t\}_{t\in\mathbf{N}}$ によって

$$X_t = X_{t-1} + u_t, \quad (t = 1, 2, 3, \cdots,)X_0 : \text{given}$$

として構成されるランダム・ウォーク $\{X_t\}_{t\in\mathbf{N}}$ となる．しかし，マルチンゲールとなるためには，$\{u_t\}_{t\in\mathbf{N}}$ の iid という仮定は強すぎる．独立性だけで十分である．

この段階で注意すべき点を列挙しておこう．

- 2 つのフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ と $\{\mathcal{G}_t\}$ があり，$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ ならば，$\{X_t\}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ についてマルチンゲールならば，$\{\mathcal{G}_t\}$ についてもマルチンゲールとなる
- マルチンゲール性と定常性は独立である
- マルチンゲール性は，2 次以上のモーメントの存在を前提としていない
- マルチンゲール性は，期中平均，期末値抽出といったデータの frequency の変更から独立である．

最初の指摘は，強度の効率的市場仮説が成立するならば相対的に弱度の効率的市場仮説も成立することを意味する．また，2 番目の指摘は，定常であってマルチンゲール性を満たさない確率過程（例えば平均ゼロの定常 AR(1) 過程）もあれば，平均ゼロの GARCH(1,1) 過程のように分散非定常であって，マルチンゲール性を満たすものもあるということを意味する．3 番目の指摘は，非常に広範な分布をも許容する定義であることを意味する．4 番目の指摘は，簡単な計算によって確認できるが，重要である．さらに言えば，サンプリング時点はランダムでもかまわない．

効率的市場仮説をマルチンゲールを基に定義するとき，仮説検定の枠組みで検証するならばノンパラメトリック検定が望ましいわけだが，時系列解析に有用な手法は知られていない．伝統的な連検定などを使っての効率的市場仮説の検証については，検出力の点からも疑わしいし，多変量のデータに対応できる可能性はない．

上記の 2 番目の指摘に関連して，近年金融関連の計量分析で非常に使われるようになったボラティリティ変動モデルと効率的市場仮説の関係についてふれておこう．ボラティリティ変動モデルは，ポートフォリオ選択行動の面からみれば，市場のリスク変動を捉えることに成功する．よってダイナミックなポートフォリオ選択において個別投資家の資産状態を改善する可能性を示唆する．このことをもって，市場の資産価格水準の予測可能性に直接関連すると考えてはならない．ボラティリティ変動の存在が意味をもつのは，市場価格変動の観察においてではなく，個別投資主体の資産選択行動に関連してである．GARCH モデルなどに代表される推定方法によって，明確なボラティリティ変動があると思われる資産価格データがあったとして

も，ボラティリティ変動の存在だけではマルチンゲール性を基礎とする効率的市場仮説は明らかに棄却されない．

もちろん Shiller (1981) が示すように，極端なボラティリティ変動が，効率的市場仮説を棄却する可能性はある．ただし，この Shiller の指摘に関しても注釈が必要である．Shiller (1981) のモデルでは，株式保有の機会費用を反映する要求リターンが一定であるとしている．この仮定をはずしてしまうと，サンプル期間を固定した場合，分散限界を設定する事実上の意味がなくなってしまう．実際，将来配当流列の割引現在価値を危険中立な確率測度の下での期待値として証券価格が決定されるという立場をくずさず，ボラティリティ変動の存在は説明できてしまう．

さて，ここで効率的市場仮説を別の面から眺めてみよう．情報増大系 (フィルトレーション) に適合する可積分な確率過程は Doob の定理によってマルチンゲールと可予測な確率過程に一意に分解（Doob 分解）されることが，確率過程論の上でマルチンゲールを考えるとき重要である．ここでの可予測の概念は，時系列解析でいうような ARIMA モデルや最近の ARFIMA モデルによる，具体的な予測スキームを指すのではなく，単に以前の時点の σ-集合体にとって可測であることを指す．よって，効率的市場仮説は，市場データを情報増大系に適合する可積分な確率過程のサンプル過程とみなすときに，Doob 分解された可予測過程が，定数あるいは時間に関する線形トレンドのような，実用上予測の用をなさない，自明な確率過程となることだと言い換えることができる．Doob 分解は，確率過程論における様々な分解定理の中で直感的に理解しやすいものであるが，統計解析上データをどのように分解するかについての具体的な手続きを示してはくれない．ここに，効率的市場仮説研究にともなう難しさの本質がある．

マルチンゲールであることを公正なゲーム (fair game) という言い方をすることがある．この点についても触れておこう．フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{N}}$ に適合するマルチンゲール性をもつ確率過程 $\{X_t\}$ に対して，

$$Z_{t+k} = X_{t+k} - X_t, \quad (k > 0)$$

を マルチンゲール差分というが，$\{X_t\}$ を証券価格とみなすとき，$\{Z_t\}$ は現時点から k 期先にかけての利得とみなされる．また， $\{X_t\}$ を証券価格の対数値とみなすとき，$\{Z_t\}$ は現時点から k 期の間の収益率とみなされる．さて単純な変形により

$$E[Z_{t+k}|\mathcal{F}_t] = 0$$

が分かる．これは，何人も現在の利用可能な情報を基礎に，将来利得あるいは将来収益率を予測しえないと解釈される．これが市場参加者全員に共通のことであるとき，まさにゲームとしてみたときに公正であると考えられる．このように，証券価格の系列が，自明な可予測な過程しかもたず，単なるマルチンゲールであるということを市場効率性と定義するという立場は理解できる．ただし，この段階でいくつかの注意が必要である．まず，第 1 にマルチンゲール差分過程 Z_t は独立過程である必要はないという点である．第 2 に，上で述べた公正さの解釈は，市場参加者が全員等しく危険中立であるという考えに直結しがちである．ボラティリティ変動のところでも述べたのと同様，市場の論理と個別投資家の論理は，解釈上峻別すべきである．

さて，マルチンゲールの確率論上の解釈が公正なゲームである以上，誰もが理不尽な利得を得られないゲームの場として市場が機能しているとみなすことは，いかにも自然である．ここで理にかなった利得とは何を指しているかといえば，過去の市場情報に基づいて売買を行なった結果得る将来利得の，現在利用可能な情報の下での期待値がゼロとなることである．これに関してはマルチンゲール変換を考えるとわかりやすい．

マルチンゲール $\{X_t\}$ と確率過程 $\{C_t\}$ を考えるとき,

$$Y_t = \sum_{\tau=1}^{t} C_\tau (X_\tau - X_{\tau-1}), \quad \text{ただし } X_0 = Y_0 = 0 (a.e.)$$

となる $\{Y_t\}$ をマルチンゲール変換という．マルチンゲール変換によって，マルチンゲール性が保証されるための十分条件として $\{C_t\}$ が可予測であることと各 $E[C_\tau(X_\tau - X_{\tau-1})] < \infty$ であることが知られている．このことは，効率的市場仮説が成立しているとき，バイ・アンド・ホールド (buy-and-hold) 戦略まで含めた，ほとんどの（多分すべての）テクニカル戦略に基づく投資の利得あるいは収益率がマルチンゲールとなることを示唆する．ここで $\{C_t\}$ は定数列である必要はない．実際，移動平均線の golden cross, dead cross にもとづく伝統的な売買のような，過去の市場データから加工されたデータにもとづく機械的売買戦略を規定する $\{C_t\}$ は確率過程であることに注意しよう．

2.2 効率的市場仮説の実証上の問題点

次に，2.1 節で述べた点を踏まえて，効率的市場仮説の実証における問題点を整理する．大上段な批判をしてしまうならば，効率的市場仮説は自然科学の仮説と同様な普遍性を最初から念頭においているのかどうかあやしいということがある．例えば，その成立が測定技術・原子核物理学の進歩にともない正否が二転三転した物理学の仮説として，19 世紀前半のプラウトの仮説がある．これは,「すべての元素の原子量は，水素原子の原子量の整数倍である」というものである．これは原子の実在すらわかっていなかった頃の仮説であることに注意しよう．あきらかにこの主張は，念頭においている対象は，場所・時点・状況に依存しない全称命題である．物理学では，仮説の対象の普遍性自体について，研究者の間で合意が成立しやすい．この仮説は，原子量の測定精度が低い時代には受容され，測定精度が高くなり否定され，測定精度の向上と同位体の発見と分離により，20 世紀の前半に完全に復活する．

マルチンゲール性にもとづく効率的市場仮説は，物理学におけるプラウトの仮説と同じく，データの整備・統計手法の進歩・金融理論の発展にともない，時間が決着してくれる種類の仮説だろうか．筆者はそうは考えない．その根拠は，2.1 節で述べた効率的市場の定義におけるマルチンゲール性の実証的な意味を考えれば，明らかであろう．2 次定常過程，あるいはその和分によって作られる非定常過程，ボラティリティ変動を許す過程，場合によっては分散の存在すらも前提としない，非常な広範囲の確率過程を許容してしまう仮説は，少なくとも現時点で実証科学の仮説としていかにも反証可能性が小さい．

効率的市場仮説に対しては，さまざまな手法で研究がなされてきた．これまで行なわれた効率的市場仮説検証の研究を類型化するなら，以下のようになる．

- マルチンゲール性の十分条件である，各種のランダムウォーク過程を考え，市場価格データがランダムウォークかを検証する
- パラメトリックな時系列モデルを，市場データにあてはめ，効率的市場仮説を検証する
- 市場価格変動の理論モデルに基づき，合理的期待形成仮説とあわせて，予測誤差が系統的でないことを検証する
- 市場価格が過去の市場データから予測不可能であることを検証する
- 効率的市場仮説と財市場の均衡条件から得られる理論的な帰結と市場データの非整合性から，仮説を反証しようとする
- 公正なゲームかどうかを，テクニカル戦略による過去の市場データに基づく投資行動から利得が得られないことを検証する

- 機関投資家を含む投資のプロの収益率が，インデックス・ファンドの収益率を上回ることがないことを，検証する

概観してもわかるように，市場価格過程のマルチンゲール性を直接検証する方向性のものはほとんどない．より正確にいえば，マルチンゲール性の十分条件を検証する作業といってよい．それゆえ，古今東西のすべての市場について効率的市場仮説の検証を行なったとしても，マルチンゲール性に基づく効率的市場仮説は，直接肯定も否定もされない．

さらに実際の検証作業において，どの時点を初期時点にしどの時点までを計るかにより，検証の前提となる情報集合はさまざまに変わりうるために，計測の結果としての効率的市場仮説の正否に関する結論が変わってくる可能性が高い．これは，アノマリーの存在の指摘といった効率的市場仮説への攻撃以前の問題である．本稿が後に示すように，（明らかに非定常である）証券市場価格データの時変構造の存在を認めてしまえば，サンプル期間の取り方によって効率的市場仮説の正否が，変わりうることがわかる．よって，マルチンゲール性を効率的市場仮説の定義にすること自体が，Lakatos (1978) のいう意味でのリサーチ・プログラムとして本来望ましくないことであったとも考えられる．

連検定のような，ノンパラメトリックな手法については，多変量データあるいは時系列データに関して有効なノンパラメトリック検定の手法が開発されているとはいえず，研究の数も少ない．パラメトリックな検定については，前提となるモデルの採用のもっともらしさについて研究者者間でコンセンサスがえられにくいことに加えて，たいていの場合本来の検出力は低い．ノンパラメトリックな手法は頑健性という利点があるものの，情報の本質的なロスがあるという問題がある．

さて，初期の効率的市場仮説研究においては，マルチンゲール性に基づく効率的市場仮説，あるいはそこに帰着される，証券収益率の合理的期待に基づいて生成される

$$\varepsilon_t = E[r_t|\mathcal{F}_t] - r_t$$

という予測誤差系列と増大情報系 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{N}}$ との直交性

$$E[\varepsilon_t|\mathcal{F}_t] = 0$$

から派生する強弱とりまぜたランダム・ウォーク検定タイプの検証が，多くの国の様々なサンプル期間に適用され，収拾のつかないほどの研究論文の累積を生み出してきた．直交性は，ガウシアン・モデルのもとでは自己相関の有無を確かめればよいが，ガウシアン過程にこだわらず一般の確率過程を考える場合，パラメトリックな手法をとれば前提とするモデルの数だけ検証方法がある．これらはすべて，上記直交性，ひいては元もとのマルチンゲール性の十分条件の検証にすぎない．

ここで，株価データのような典型的な非定常時系列データに対して，サンプル期間を変えることで効率的市場仮説の成否が変わりうることを見てみよう．図 1（左）に TOPIX 指数の過去 20 年間にわたる月次データ（日次終値の月中平均）を，同図（右）にその対数階差のプロットを示す．

図 1（左）の株価データを目視してわかることは，サンプル期間中，データは下方トレンドがあるようにも見えるくらいである．また TOPIX の収益率データについて，単位根検定において，単位根の存在は棄却される．つまり定常だという可能性が，その段階で示唆されるが，明らかにサンプル期間中に分散は不均一にみえる．ただ，平均値の定常性は，なんともいえない．

サンプル期間を仮に，4 分の 1 の長さにしてしまうと，図 2 のようになり，分析者の平均定常性の判断はより難しくなるだろう．サンプル期間を短くしてしまうと，ARFIMA モデルが扱うような長期記憶を扱う場合に問題が生ずる，という批判をうけることになる可能性がある．

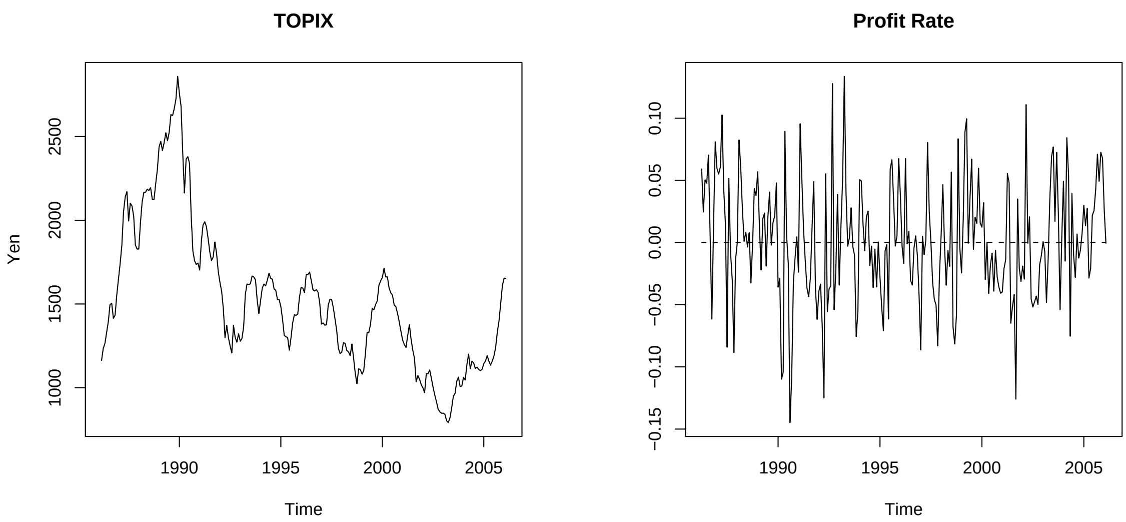

図 1　TOPIX，月次（月中平均），1986/3-2006/2

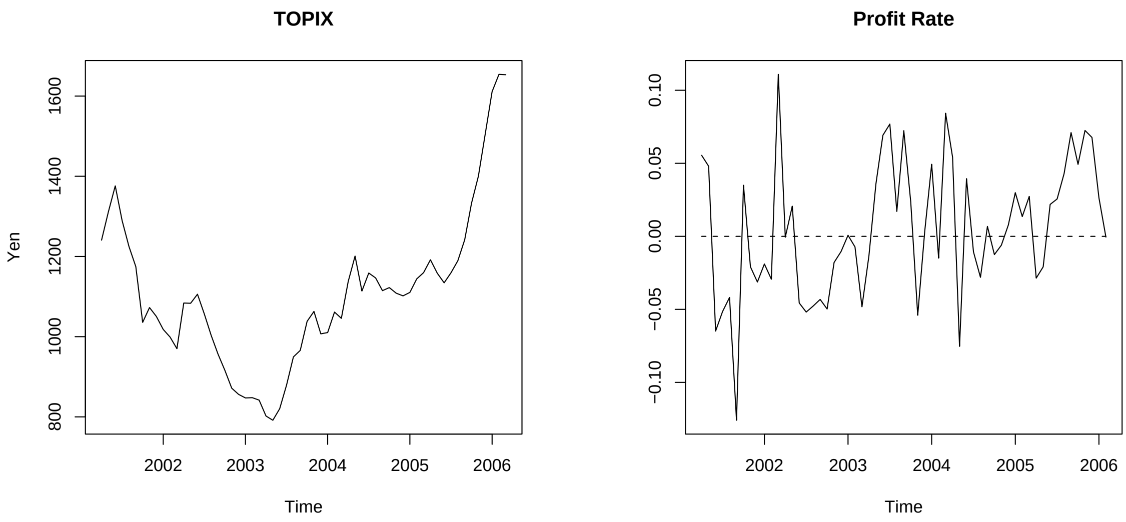

図 2　TOPIX，月次（月中平均），2001/3-2006/2

確かに長期記憶をあつかう場合の問題自体，サンプル期間のとり方に大きく依存することは容易に理解できる．

日本に限らず，多くの国での株式価格他の資産価格を考えるとき，価格水準ばかりでなく収益率に変換したデータに関しても，定常性は疑わしい．弱定常性すら疑わしい場合がほとんどであろう．そうなると，非定常なモデルをあてはめなくてはならないが，株式価格の決定に関する疑いをいれないほど強固な理論モデルが存在しなければ，非常に広範なクラスに属するパラメトリックな非定常モデルが候補となる．また，ARFIMA モデルのような，定常と非定常の境界に位置しうる時系列モデルも視野にいれなくてはならないだろう．

仮に，そうした広範なパラメトリックモデルのクラスを決めたとすると，あとはモデル選択

の問題となり，AIC や SBIC といった情報量基準によって，選べばよいと考えてしまいがちだが，そうした情報量基準のようなベイズ統計学に立脚したモデル選択は，選択の結果はサンプルの採り方に決定的に依存してしまう．データが，1 年経過するごとに，選択されるモデルが次々と変わる可能性を否定できない．当然，効率的市場仮説の正否も，サンプルのとり方により大きくかわることが否定できない．

2.3　効率的市場仮説の検証の新しい方向性の提示

これまで述べてきたように，効率的市場仮説に対して仮説検定タイプの検証作業をすることは必然的に，整理不可能なメモランダムを累積する作業に等しい．効率的市場仮説にかかわる研究者はまるで，ゼウスの怒りを買い，運びあげては転がり落ちてしまう大理石を，丘の上に押し上げるという永劫の罰を与えられたギリシャ神話の登場人物シシュポスのようである．

2.1, 2.2 節で示したように，効率的市場仮説は，本来の仮説の理論的な成り立ちからいって，あるデータセットに対して白・黒をつけることが難しい．それは，仮に増大情報系を明示して，どの程度の強度の仮説かをはっきりさせたとしても，ベイズ的なモデル選択プロセスを含めてしまうと，仮説の検証結果はサンプルの取り方に強く依存してしまう．

そこで，筆者は，

1. 資産価格過程は非定常であり，対数差分をとる程度のデータ加工によって定常化されない
2. 効率的市場仮説の正否を，資産価格の時系列のサンプルごとに，モデルを設定し仮説検定を行ない，白黒をつけるという研究の累積によって決着をつけることは，不可能である
3. サンプル期間の長さの取り方に関係なく，統一的に市場の状態を俯瞰できる，各時点の効率性を測る指標の発見が望ましい

という認識に立脚して，局所定常データの畳み込みとして非定常データを捉えることを提唱する．また，市場効率性を測る指標として，低次（1 あるいは 2）の自己相関係数を考える．

このようなアプローチをとることの利点は，各時点の近傍は局所的に定常であるから，ARMA モデルなどのあてはめで十分な近似が可能となり，時点ごとの自己相関係数を高い精度で測れることである．しかも，サンプル期間全体に対しては，いかなる定常性も要請する必要がないことが重要である．次節では，具体的な分析枠組みを示す．

3　状態空間モデルによる相対的な市場効率性の測定

本節では，株価データを例にとり，資産価格の収益率データに弱定常性が成立しそうもないことを示す．さらに，2.2 節で示した方向性で，産価格の収益率データを扱う非定常モデルとして時変 AR モデルを示し，その推定方法，さらには時変 AR モデルによって，どのようなことを分析することができるかを明らかにする．

3.1　株価収益率の非定常性

株式収益率の自己相関を計測する最も単純な方法は，株式収益率データに対して AR モデルをあてはめてみることである．各次の自己相関関数を，標本自己相関関数の計測によって行なうこともできるが，時系列解析からみれば Yule-Walker 方程式によって，自己相関関数と AR モデルが 1 対 1 に対応することを考えると，AR モデルをあてはめることが推定の都合上よいことは明らかである．

いま x_t を t 期の株式収益率とするとき，AR(k) モデル

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \cdots + \alpha_k x_{t-k} + u_t, \quad u_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_u^2) \tag{1}$$

が，サンプル期間 $t = 1, \cdots, T$ の間で変わらないとして分析するのが，通常の時系列解析である．これは FFT(Fast Fourier Transform) のような周波数領域の解析でも同様である．ただし，このような分析が意味をもつのは，データが弱定常性をもつ場合であるが，株式収益率のデータをプロットすれば，このような弱定常性の成立は一見してあやしいことは，TOPIX の月次データですでに見た．

日次データを用いた膨大なサンプルサイズを持ってきても，やはり弱定常性の成立があやしいことを強調するために，1972/1/4-2007/2/29 までの日経 225 の日次終値の収益率をプロットしたのが図 3 である．通常の時系列分析では用いるフルサンプルに対して DF(Dickey-Fuller), ADF(Augmented Dickey-Fuller) 検定などを行ない定常性のチェックを行なう．実際，このデータに対して ADF 検定を行なったところ，定常性があるという検定結果を得る．（表 1.）なお，ADF 検定は，定数項あり・トレンド項ありモデルを仮定し，対立仮説としては定常であるとする片側検定を行ない，検定の次数選択は SBIC 最小化を基準とした．（以下同様.）

表 1　日経 225，日次収益率の ADF 検定

検定統計量	1% 臨界値	5% 臨界値
−71.43(1)	−3.98	−3.42

（注）括弧内は，選択された次数を表す.

ところが，図を見れば定常性はあやしい．全体的に見れば，1992,3 年ころを境に volatile になっている点は目視でも分かる．細かく時代背景を考えれば，高度経済成長時代，オイルショック，バブル期，市場が荒れて急落した 1987 年のブラックマンデー付近，バブル崩壊後など，資本市場はさまざまな時代を経験している．この点を考慮するに，株式市場を巡る構造が，過去から現在まで一貫して同じであると考えるのは，あやしい．そうであれば，資料発生機構 (DGP, Data Generating Process) が変化していないと考えるほうが，おかしいのではないか．さらにデリバティブ技術の向上，金融情報技術の発達，間接金融から直接金融へ日本がシフトしてきている点などを考慮すれば，このような長い期間にわたって「データに定常性がある」と考えるのには無理がある．1972 年の投資家心理と，現在の投資家心理が同じだとも，到底思えない．

通常，金融資産の収益率データは弱定常性を満たすと考えられる．しかし，以上の議論から，この段階で弱定常性の成立について懐疑的な立場をとることの正当性があることに読者は注意してほしい．すなわち，1 次モーメントも 2 次モーメントも時間を通じて一定ではないと考えることは，ごく自然だといえるということである．

通常の ADF 検定によれば，確かに多くの金融資産の収益率データは単位根を持たないと判断される．しかし，慎重に検討すれば，データの 1 次モーメントも 2 次モーメントも一定とは言い難い．実際，2 次モーメントの非定常性に注目したのが Engle (1982) の ARCH モデルを嚆矢とする，ボラティリティ変動モデルである．われわれはさらに一歩慎重な立場をとって，1 次モーメントすら定常ではないという立場をとる．

日経 225 平均株価 (日経 225)，TOPIX, Dow Jones Industrial Average(DJIA), S&P500 の 4 つの株価指数について，1955/1-2006/2 までの月次（日次終値の月中平均）データを用いた場合の株式収益率のグラフが図 4 である．（実際には対数階差をとった．以下同様.）

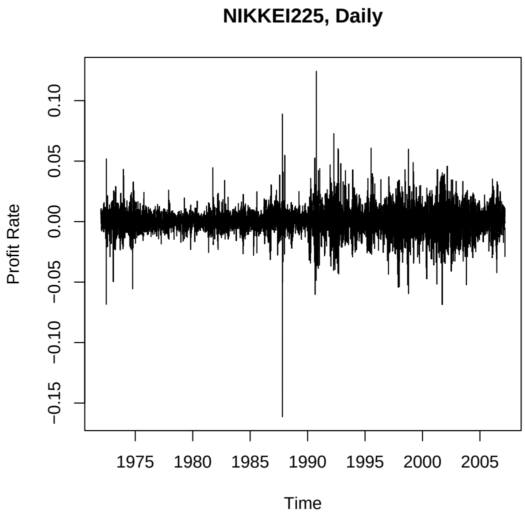

図 3　N225, 収益率データ

図 4 のようなグラフを見せられたとき，多くの計量経済学者は弱定常性を持つと考える．実際，ADF 検定の意味でこれらのデータは弱定常性を持つと判断される．そこで，弱定常性の成立はごく局所的であり，その状態が時々刻々変化していくと考える Moving-Window 法に注目して，弱定常性に十分な根拠があるかを検証してみよう．Moving-Window 法は時系列解析では以前よりごく一般的に行なわれている．たとえば脳波のように一見して非定常と見なされるものに対してサンプル期間を重複するいくつかのサブサンプルに分割し，それぞれのサブサンプルに対して定常時系列モデルを当てはめる．経済学でも，Stock and Watson (2003) などが用いている．Moving-Window 法による分析によって，まず自己相関の時変構造を確認し，さらに AR 係数の動態に関するもっともらしい想定を見出すこととする．

具体的には株価収益率のサンプル $(x_1, \cdots, x_T)$ に対して，window 幅 w の $T-w+1$ 個のサブサンプル $(x_{\tau-w+1}, \cdots, x_\tau)$，$\tau = w, \cdots, T$ を作る．それぞれに対して k 次までの自己相関係数を計算する．

試しに，各種の株価収益率に対して，Moving-Window 法によって 1 次から 4 次までの自己相関係数を計算した結果を図 5 に示す．なお，図の凡例で "AC" は自己相関係数を意味する．（以下同様.）本稿では，window 幅を 100 とした．Moving-Window 手法の分析結果は図 5 の通りで，この結果だけでも，株価収益率の自己相関構造が時変性を持つことが伺える．このことは，単位根の有無に関する DF,ADF 検定は，データの定常性に対して大きな情報をわれわれにもたらさないことも示唆する．なぜならば，弱定常ならば，期待値・分散・共分散が時間を通じて不変であり，自己相関係数は 1 次と 2 次のモーメントのみによって定義されているからのだから，時間を通じて一定でなければならないからである．すくなくとも大きな変動が存在してはならない．そこで，日経 225 の収益率データの 1 次と 2 次のモーメントに関する統計量（平均・分散・1 次の自己共分散）を個別に図 6 に示した．

この結果を見る限り，平均・分散・1 次の自己共分散は時間を通じて変動している．平均の推移を見ると，1990 年ころを境に，符号条件の変換が起こっている．それまで安定して成長してきた日本経済において，株式市場は一貫して平均が正の上昇トレンドを持っていた．しかし，1990 年頃を境に，平均は負に転落している．分散・共分散の推移をみても，時変構造が認められる．もっともこれは広く知られた結果であり，この変動を把握するモチベーションこそ

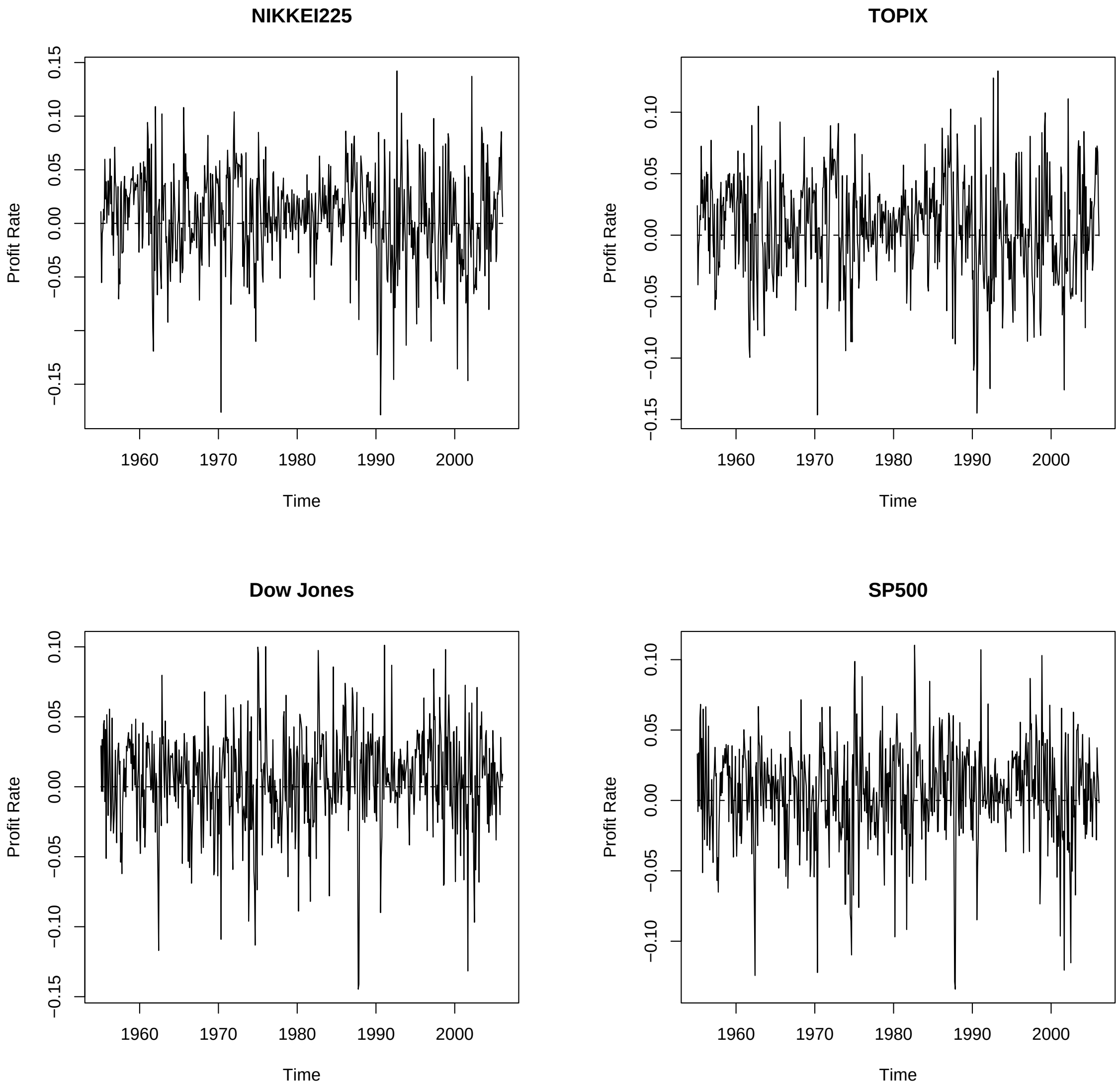

図 4　株式収益率データ

がボラティリティ変動モデルであることを思い起こそう．

自己相関係数は，定義より，自己共分散を分散で除したものである．よって，相関係数の変動は，分散に対する自己共分散の相対的な大きさの変動を意味する．分散に対する 1 次の自己共分散の相対的な大きさの変動を見るために，両者を同じ図に描いたのが，図 6（右下）である．確かに，分散に対する 1 次の自己共分散の相対的な大きさは 1 次の自己相関係数の変動と同じような挙動を示しているのが分かる．

つぎに Moving-Window 法によって抽出された各時点の 1 次の自己相関係数自体を時系列データと考えて，その性質を調べてみよう．まず，一見してわかることは，このデータ自体が弱定常性を持ちそうもないことである．そこで，ADF 検定を行ない，データの定常性をまずは確認することにした．結果は表 2 の通りで，どの株価指数についても，Moving-Window 法によって抽出された自己相関係数データは，ほぼ単位根を持つという結果を得た．この結果は，

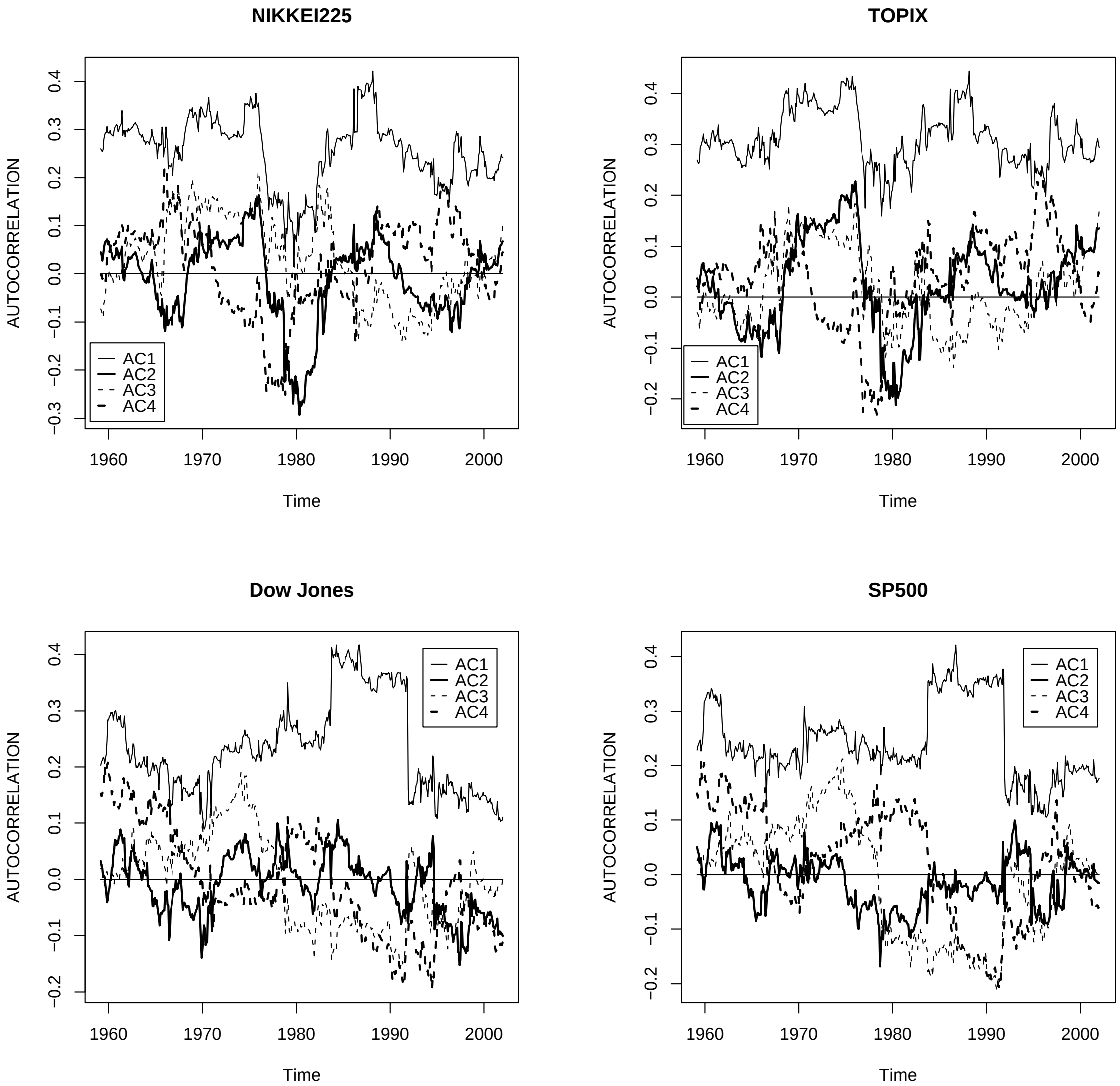

図 5　Moving-Window

株価収益率データのフルサンプルに対して自己相関係数を求めて，市場効率性を判断する危うさを示唆しているものとも解釈ができる．ただし，筆者は，ADF 検定がデータの定常性・非定常性を完全に明らかにするという立場をとっていないことは，これまでも述べてきたとおりである．ここで，ADF 検定を行なう真の目的は，次節において示す時変 AR モデルの AR 係数の動学を考えるために情報を得るところにある．

3.2　時変 AR モデルの状態空間表現

得られている時系列データの全サンプル期間に対して (弱) 定常性が疑われるときに，時系列解析の立場からみれば，いくつかの接近法がある．たとえば，単一時系列に関して伝統的な Box-Jenkins 流の ARIMA モデルにこだわらず，ARFIMA モデルのような小数過程も視野

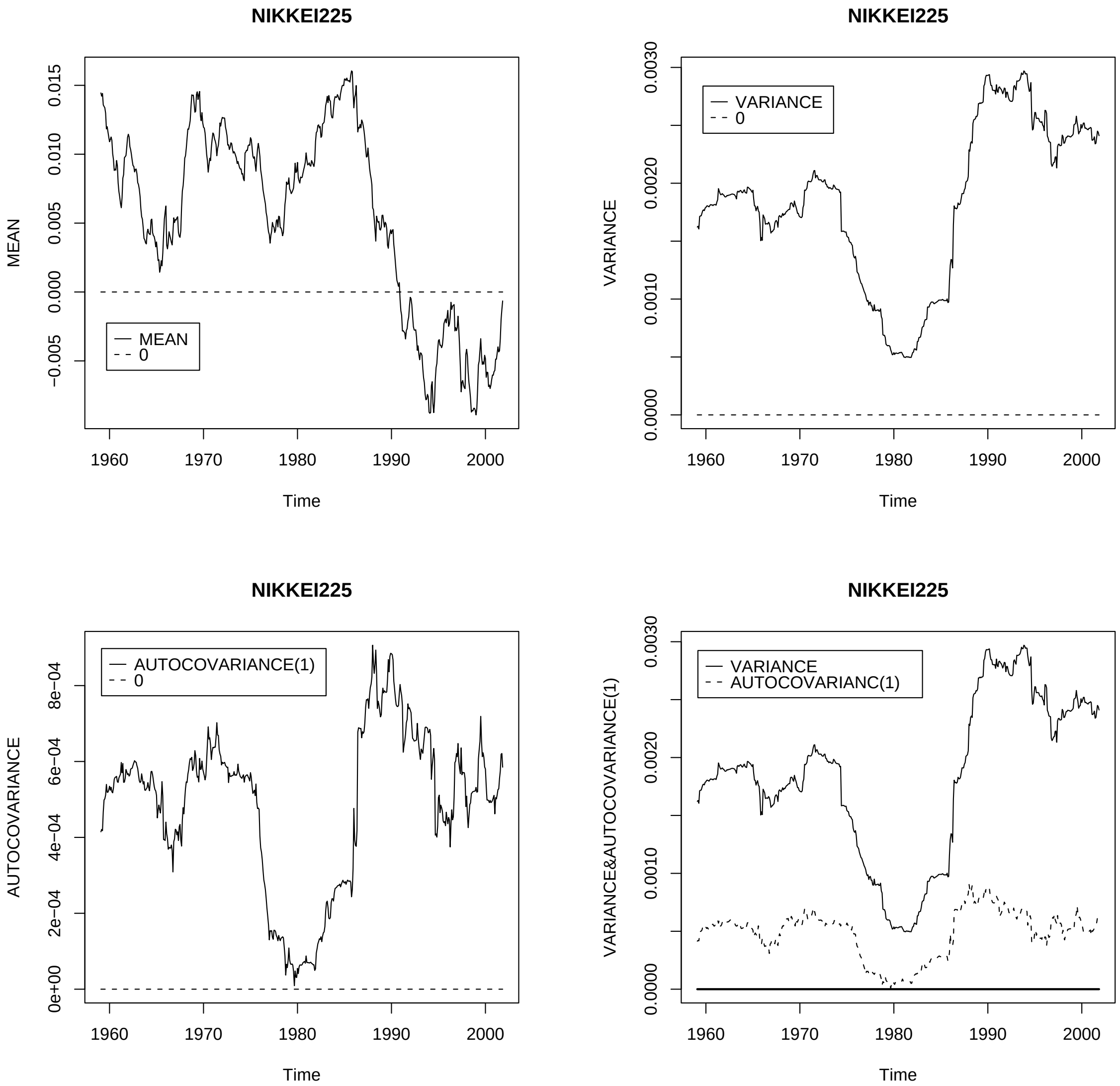

図 6　期待値・分散・共分散の推移

に入れたパラメトリックモデルをあてはめることが考えられる．また，Tong (1983) 以降の threshold モデルのような非線形時系列モデルも候補となろう．さらにはニューラル・ネットワークモデルや，ノンパラメトリック回帰のようなノンパラメトリックな解析もありうるだろう．しかし，相対的な (各時点の) 市場効率性の，頑健かつ単純な指標としての低次（1 あるいは 2）の自己相関係数を考えるということでの目的には，どれもふさわしくない．

われわれが採用するのは，(1) の AR モデルの AR 係数 $\alpha_j, (j = 1, \cdots, k)$ が，ある動学体系 (dynamical system) にもとづいて変化するという，時変 AR モデルである．この時変 AR モデルは，次に示すような，観測方程式と遷移方程式から成る状態空間モデルの特殊な場合として表現することができる．（状態空間モデルについては，北川 (2005)[9 章]，Hamilton (1994)[Ch13] などが詳しい．）

表 2　ADF 検定

	AC1	AC2	AC3	AC4
日経 225	$-2.96(0)$	$-2.13(0)$	$-2.97(0)$	$-2.36(0)$
TOPIX	$-3.71(0)$	$-2.18(0)$	$-2.37(0)$	$-2.64(0)$
DJ	$-2.23(0)$	$-3.17(2)$	$-2.42(0)$	$-2.83(0)$
SP500	$-2.90(0)$	$-3.48(2)$	$-1.78(0)$	$-1.78(0)$
臨界値	1%	-3.98		
	5%	-3.42		

（注）括弧内は，選択された次数を表す．

観測方程式

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{X}_t \boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{u}_t,\ (t = 1, \cdots, T) \tag{2}$$

遷移方程式

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{F}_t \boldsymbol{\beta}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_t \boldsymbol{v}_t,\ (t = 1, \cdots, T) \tag{3}$$

状態空間モデルにおいて，時系列データ $\boldsymbol{y}_t$ に対して，各時点 t の $\boldsymbol{\beta}_t$ を状態ベクトルとよぶ．さらにこれらと観測誤差ベクトル $\boldsymbol{u}_t$ と，行列 $\boldsymbol{X}_t$ によって観測方程式 (2) が形成される．この観測方程式は，計量経済学にあらわれる回帰モデルにおける回帰係数に時間の添字がつけられているものだと考えてよい．この時間の経過にしたがって変化する回帰係数の動学を規定するのが遷移方程式 (3) である．遷移方程式は，回帰係数 $\boldsymbol{\beta}_t$ に関する不規則な摂動あるいはノイズ $\boldsymbol{v}_t$ をもつ 1 階のベクトル差分方程式となっている．

ここで，状態空間モデルについての想定をまとめておく．

1. $\boldsymbol{u}_t$ は平均ベクトル $\mathbf{0}$，共分散行列 $\boldsymbol{R}_t$ の正規白色雑音
2. $\boldsymbol{v}_t$ は平均ベクトル $\mathbf{0}$，共分散行列 $\boldsymbol{Q}_t$ の正規白色雑音
3. 各行列のランク条件について規定はない

状態空間モデルは，時系列解析にあらわれる非常に多くの線形モデルを表現することができる．状態空間モデルが考慮しているのは，弱定常モデルには限らない．すぐ上に記したように，分散が不均一，平均定常性がみたされない時系列にも対応しうることに注意しよう．

われわれは，Moving-Window 法で標本自己相関係数の推移を計算したこれまでの分析結果から，各次の時変 AR 係数は単位根を持ちランダム・ウォークすると仮定する．このように仮定することで，状態ベクトルの動学方程式を規定する遷移行列 $\boldsymbol{F}_t$，ノイズ変換行列 $\boldsymbol{\Phi}_t$ が単位行列となり，モデルの推定が簡略化される．具体的には，一変量株価収益率系列 $\{x_t\}, (t = 1, \cdots, T)$ に対して，$\boldsymbol{R}_t, \boldsymbol{Q}_t$ に関してより単純化して時変 AR モデルを状態空間モデルで表現すると，以下のようになる．

観測方程式

$$x_t = \begin{pmatrix} x_{t-1} & x_{t-2} & \cdots & x_{t-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,t} \\ \alpha_{2,t} \\ \vdots \\ \alpha_{k,t} \end{pmatrix} + u_t, \quad u_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2_{ut}) \tag{4}$$

遷移方程式

$$\begin{pmatrix}\alpha_{1,t}\\ \alpha_{2,t}\\ \vdots\\ \alpha_{k,t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\ 0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{1,t-1}\\ \alpha_{2,t-1}\\ \vdots\\ \alpha_{k,t-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_{1,t}\\ v_{2,t}\\ \vdots\\ v_{k,t}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, \sigma_{vt}^2\mathbf{I}) \quad (5)$$

ただし (5) において，$\boldsymbol{v}_t \equiv (v_{1,t}\ v_{2,t}\ \cdots\ v_{k,t})'$ である．

3.3 時変 AR モデルの平滑化 (スムージング)

われわれは，上記のモデルに対してカルマン・スムージングによって状態変数の推定を行なう．正確にはサンプル期間 $\{1, 2, \cdots, T\}$ を固定した固定区間スムージングによる推定である．

ところで，従来のカルマン・スムージングのアリゴリズムでは，まずカルマン・フィルターによって状態変数を初期時点から出発して逐次的に求め，次に末期時点から初期時点に向かって逐次的に状態変数の推定値を得る．その際，通常の計量経済分析では攪乱項の分散の推定値を最尤法などによって求め，その推定値のもとでカルマン・スムージングを実行するため，膨大な計算量を要する．さらに正規性の仮定が妥当かどうかは分からない．しかし，カルマン・スムージングによる状態変数の推定は，実は古典的線形回帰モデルの枠組みで実行可能であることに気がづけば，計算が易化するだけでなく，仮定も緩まり，さらに推定された状態変数についての仮説検定も容易となってしまうことを，伊藤 (2006) が示した．伊藤は，Durbin and Koopman (2001) と異なる形で，直接的な平滑化法を示している．

伊藤 (2006) の考え方を時変 AR(k) モデルに適用すると，以下のようになる．ベクトル$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$と行列$\boldsymbol{Z}$を

$$\boldsymbol{y} \equiv \left(\begin{array}{c} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_T\\ \hline\hline -\alpha_{1,0}\\ -\alpha_{2,0}\\ \vdots\\ -\alpha_{k,0}\\ \hline 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \hline \vdots\\ \hline 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{array}\right), \quad \boldsymbol{\alpha} \equiv \left(\begin{array}{c} \alpha_{1,1}\\ \alpha_{1,2}\\ \vdots\\ \alpha_{1,T}\\ \hline \alpha_{2,1}\\ \alpha_{2,2}\\ \vdots\\ \alpha_{2,T}\\ \hline \vdots\\ \hline \alpha_{k,1}\\ \alpha_{k,2}\\ \vdots\\ \alpha_{k,T} \end{array}\right), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \left(\begin{array}{c} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_T\\ \hline\hline v_{1,1}\\ v_{2,1}\\ \vdots\\ v_{k,1}\\ \hline v_{1,2}\\ v_{2,2}\\ \vdots\\ v_{k,2}\\ \hline \vdots\\ \hline v_{1,T}\\ v_{2,T}\\ \vdots\\ v_{k,T} \end{array}\right)$$

$$
\boldsymbol{Z} \equiv \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
x_0 & & & & x_{-1} & & & & & x_{-k} & & & \\
& x_1 & & & & x_0 & & & \cdots & & x_{-k+1} & & \\
& & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
& & & x_{T-1} & & & & x_{T-2} & & & & & x_{T-k} \\
\hline\hline
-1 & & & & & & & & & & & & \\
& & & & -1 & & & & \cdots & & & & \\
& & & & & & & & & -1 & & & \\
\hline
1 & -1 & & & & & & & & & & & \\
& & & & 1 & -1 & & & \cdots & & & & \\
& & & & & & & & & 1 & -1 & & \\
\hline
& \vdots & & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\
\hline
& & 1 & -1 & & & & & & & & & \\
& & & & & & 1 & -1 & \cdots & & & & \\
& & & & & & & & & & & 1 & -1
\end{array}\right)
$$

（但し $\boldsymbol{Z}$ で空白部分はすべて 0.）

と定義するとき，すべての観測値 $\{x_t\}$, $(t = 1, \ldots, T)$ についての観測方程式 (4) と遷移方程式 (5) は,

$$
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{6}
$$

のような巨大な線形回帰モデルとして表現可能であることに注意しよう．(6) で，もはや時間を表す添え字 t がついておらず，状態空間モデルによって表現されていた動学体系は，形式的には静学体系に変換されてしまう．(6) は古典的な線形回帰モデルに他ならない．このような線形回帰モデルの枠組みでの回帰係数の推定量はフルサンプル情報を用いて作成されるため，一度もカルマン・フィルターを実行することなく，カルマン・スムージングと同じように，フルサンプル情報を活用した状態変数に関する推定が可能となる．カルマン・スムージングを線形回帰モデルへ帰着させる発想を，本稿では Ito Regression と呼ぶこととする．なお $(\alpha_{1,0}, \cdots, \alpha_{k,0})$ が状態空間モデル推定における初期値ベクトルになっている．

このような古典的な推定方法で，状態空間モデルの推定が可能となったのは，コンピュータの性能の長足の進歩によるところが大きい．2007 年現在の標準的な MPU64bit の PC に 1GB の主記憶を実装すれば，4000×4000 の行列の逆行列を倍精度で数秒単位でもとめることが可能である．

Kalman (1960) が示したアルゴリズムは確かに主記憶を極端に節約することが可能である．そのことは，現在と比較して貧弱な能力しかもたなかった当時のコンピュータにおいて非常な有用性があったことは間違いない．しかし，伊藤 (2006) が示すように計量経済学における応用にあらわれる，高々数百の大きさのサンプルに対する固定区間スムージングを行なうためには，カルマン・フィルターとスムージングを組み合わせたアルゴリズムは必要がない．また，カルマン・フィルターのアルゴリズムは，各ステップの計算機内部の計算において，行列の非負定値性や対称性が崩れることにより，桁落ちが生じ，カルマン・ゲイン行列がまったく信頼できないものになる可能性があることはよく知られている．（たとえば片山 (2000) の 8 章にくわしい．）

すぐ上に述べた数値的な不安定性は，状態空間モデルの最尤推定を行なう場合に非常に問題となる．各推定パラメータを固定して BFGS その他のアルゴリズムを使って，カルマン・フィルターでもとめた尤度の最大値を逐次的にもとめようとするとき，時として，状態ベクトルの共分散行列を改訂するステップにおいて非負定値性がくずれて計算が破綻する状況におちいる．

Ito Regression では，通常の最小二乗法・一般化最小二乗法などによって，簡単に状態変数ベクトルの推定が可能であるだけではなく，最尤法とは異なり撹乱項に対する正規性の仮定も必要ない．もちろん，精度の高いパッケージを使う必要があるが，本稿で行なった時変 AR モデルの推定のような数百の大きさのサンプルサイズの単一時系列モデルの推定において，パフォーマンスの差は歴然であった．

3.4　時変 AR モデルによる平滑化の利点

Ito Regression によって状態空間モデルの推定を行なう場合には，OLS 推定に関する典型的な想定がみたされるならば，推定された状態変数の t 値も容易に計算でき，推定された状態変数の統計的有意性も知ることが出来る．分散不均一性が発生しても，共分散行列を White 修正すれば，一致性のある t 値が得られるので問題はない．

ただし本稿のモデルのように，観測方程式が AR モデルのような，従属変数のラグ付き変数を説明変数とする場合には，OLS 推定を行った各係数についての t 検定を行なうことは，厳密にいえばできない．

カルマン・スムージングを行なう工学的な応用の多くの文脈においては，遷移方程式と観測方程式における，一定とかぎらない撹乱項の共分散行列が既知としているために，推定された状態変数 (ここでは AR 係数) の分散が計算できて，推定値の区間推定を行なえる．共分散行列について既知とせず，またそれらの推定を直接行わないわれわれの接近においては，厳密性を欠くことを認識した上で，t 検定を行ない p 値の推移をプロットすることで，共分散行列を既知とした場合の区間推定の代替物として，十分機能すると考える．

そこで，AR モデルにおける次数選択は SBIC などを見るのが普通であるが，Ito Regression では，t 値が有意かどうかで決定することとする．観測方程式の撹乱項の分散 σ_{ut}^2 と，遷移方程式の撹乱項の分散 σ_{vt}^2 について，$\sigma_{ut}^2 \neq \sigma_{vt}^2$ で，分散不均一性が発生することは普通である．これについては，共分散行列の White 修正を行うことで対処することにした．

状態空間モデルによる時変 AR モデルは，局所定常モデルの畳み込み (convolution) になっている．よって，推定された AR 係数が，各時点の近傍のサブサンプル期間のデータにのみ依存している．この点を確認してみよう．まず，われわれの推定結果が，サンプル期間の端の部分を除いて，サンプル期間の長さのとり方によらないことを示すのが，図 7(左) である．これは，後述する表 3 にある日経 225 のデータを 1984 年を境に前半と後半に分け，それぞれのサブサンプルのもとで Ito Regression を行ない，同じ図に描いたものである．

推定される最初のほうの状態変数の値の「調整のような経路」はごく短く，調整後は，きわめて似た挙動を示していることが確認された．また，1983 年までのデータで Ito Regression をしても，2006 年までのフルサンプルで Ito Regression をしても，推定される状態変数の挙動はやはりほとんど同じである．サブサンプルの最後のほうでの推定値が，フルサンプルを用いた場合よりも若干小さい．逆に言えば，フルサンプルを用いることの優位性は，推定に用いたサンプル後半の状態変数の挙動をもしかしたら正しくとらえていないかもしれない，というくらいである．とは言え，1955-1983 のサブサンプルでの推定結果は，サンプル終わりまで有意である．（図 7（右).）

以上のように，サブサンプルのとり方には，概ね依存しないことが確認できた．これは，状

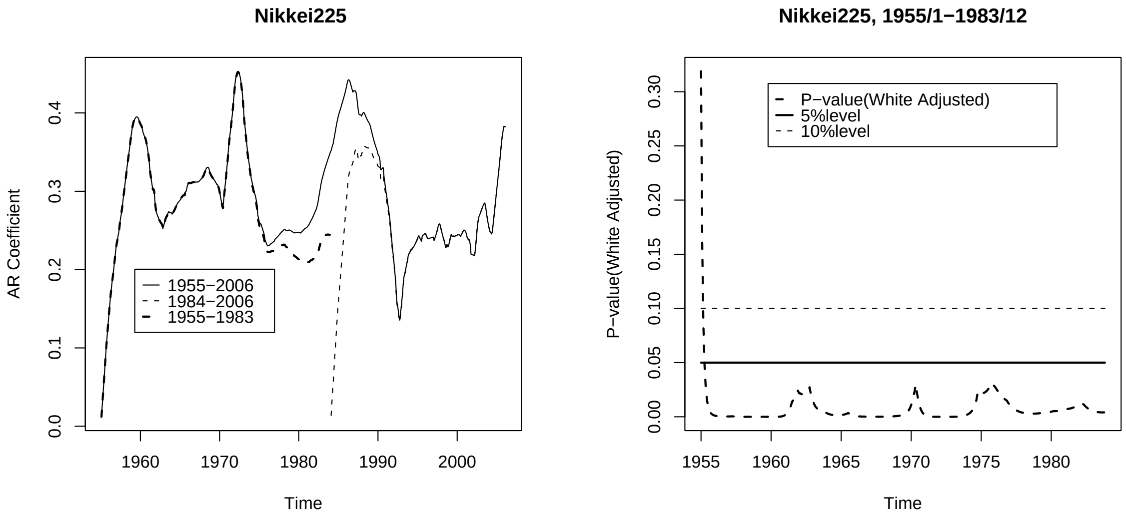

図 7　N225，サンプルサイズに依らず頑健な推定結果

態空間モデルで表現されるわれわれの時変 AR モデルが局所定常過程として，非定常な株価データを捉えていることからくる当然の帰結である．それでは，各時点の AR 係数として推定されたものが，どの程度の幅のサブサンプルに依存して推定されているかが気になる．この問題に対しても，Ito Regression を用いるわれわれの枠組みは明確な回答を与えてくれる．

具体的には，(6) で状態変数ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の OLS 推定量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ は，

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$$

で与えられるから，観測データ $(x_1 x_2 \cdots x_T)$ の線形推定量である．そこで，行列 $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'$ の各行をプロットすることにより，各時点の実質的な window 幅がわかる．この行列を日経 225 の月中平均データに関して Ito Regression で計算して，いくつかの行 $r = 1, 10, 100, 300, 400, 613$ についてプロットしたのが，図 8 である．

このプロットで縦軸が各 r 時点の係数推定に用いられる各時点の「重み」である．なお，用いた日経 225 収益率データのサンプルサイズが 613 であるため，横軸の 613 までが，観測データ $(x_1 x_2 \cdots x_{613})$ についての「重み」を表していることに注意しよう．大目に見積もっても，200 期程度のデータのみが，各時点の AR 係数の推定値に貢献していることが，一目でわかる．

以上のようにわれわれの接近法によれば，Moving-Window 法のように恣意的な window 幅を定める接近法と大きくことなり，データの特性をモデルが汲み取った結果，最適な window 幅が得られたと考えられる．また，このことは，時系列データの記憶の長さとも関連するかもしれない．株価収益率の AR モデルの局所的なあてはめが DGP と正しいとする限りは，Lo (1991) が示唆するような長期記憶を支持しないことを意味するからである．ただし，われわれは，局所定常モデルが，データの唯一無比の正しいモデルという立場をとらないので，この議論については，これ以上深入りはしない．

次節において，Ito regression をもちいて株価収益率の効率性の時変特性を調べる．

4　株式市場の市場効率性の実証

本節では，3 節で示した手続きに従って，各国の株式市場の集計株価データに対して，各時点での市場効率性を計測し，結果を分析する．実証分析の対象データは表 3 にある 6 カ国 8 個の株価指標とする．

表 3　データ

国，地域	株価指標	サンプル期間	Frequency
日本	日経 225	1955/1-2006/2	月次
	TOPIX	1955/1-2006/3	月次
米国	Dow Jones Industrial Average	1955/1-2006/4	月次
	SP500	1955/1-2006/5	月次
韓国	KOSPI200	1990/1-2004/12	月次
英国	FTSE100	1984/4-2007/2	月次
香港	HANGSENG	1987/1-2007/2	月次
ドイツ	DAX30	1981/1-2007/2	月次

（注）月次は，日次終値の月中平均を意味する．

各国データに対して Ito Regression を適用した結果が図 9〜図 14 であり，観測方程式に AR(1) を仮定した場合の Ito Regression による状態変数の推定値の推移, 各状態変数の t 値に対応する p 値の推移が示されている．推定方法は最小二乗法を用い，t 値は White 修正を施した．状態変数の初期値，データの初期値はともに全て 0 を仮定した．状態変数の初期値を得るためにサンプルの最初のほうを使った事前分析も行ない，その初期値のもとで Ito Regression の推定も行なったが，推定結果を全体で見ると初期値に依らず頑健なことは確認済である．ただし状態変数の初期値を 0 に仮定することで，サンプル初頭の状態変数の推定値の挙動は，0 よりも高い水準への「調整のような経路」を経ていることに注意されたい．

既に言及したように，AR の次数選択は普通は SBIC のような情報量基準を用いて決定するのが通常であるが，カルマン・スムージングを古典的線形回帰モデルの形に帰着させるという Ito Regression の発想では，t 値が有意かどうかを重視し，その結果，8 個すべての株価指標の収益率データについて，AR(1) が選択された．（AR(2) 以上を仮定して Ito Regression を実行しても，2 次以上の係数の t 値はほとんど有意ではなかった．）

この実証分析の結果を解釈すると以下のようになる．まず，全体的に見ると 6 カ国 8 株価指標の全てで，推定された時変 AR(1) 係数は時間を通じて変動しており，その変動は，Moving-Window 法による 1 次の自己相関係数の推移と，極めて似ている．さらに t 値は概ね有意である．従って 6 カ国全てで，株式市場における市場効率性には確かな時変構造がある．

次に，各国ごとにより細かく見る．日本についてまず，日経 225 と TOPIX を用いた Ito Regression の結果は非常に似ている．時変構造を細かく見ると，90 年代初頭に AR 係数がサンプル期間の中では最低水準に達し，またちょうどこのころ t 値が有意ではなくなっていることからこの頃一時的に日本に株式市場には自己相関構造が消え，市場はかなり効率的であったことになる．逆に，1960 年頃，1970 年代はじめ，1980 年代中盤頃の 3 つの時期において，日本の株価収益率は自己相関を強く持っていたことから，これらの時期には市場効率性が大きく

損なわれていたことが示唆されている．

米国では，Dow Jones Industrial Average と S&P500 を用いた Ito Regression の結果は非常に似ている．時変構造を細かく見ると，1980 年代後半にもっとも AR 係数の推定値が高い水準にあり，サンプル期間の中ではもっとも市場効率性が損なわれている．1990 年代後半から現在までは AR 係数は下降傾向にあり，さらに，t 値も 2000 年ころを境に有意ではなくなっていることから，過去 50 年ほどで最近の米国株式市場はもっとも効率的な水準になっていることが分かる．

韓国では，用いたサンプル期間が短いこともあり，1998 年頃もっとも市場効率性が損なわれているということ意外は大したことは分からない．

英国では，AR 係数の水準が最も高いときで 0.25 強程度であり，他国と比べて全体的に AR 係数の水準が低いことを指摘しておきたい．時変構造を見ると，2000 年頃もっとも AR 係数の水準が低く，この前後数年は t 値も有意ではないことから，この頃の英国の株式市場はかなり効率的であったと言える．

香港では，1995 年ころ AR 係数の水準がもっとも低く，t 値も有意ではないことから，この頃の香港市場はかなり効率的であったことになる．

ドイツでは，ここ 20 年ほどの AR 係数の推移をみると，上昇トレンドがあるようにも見えることから，最近になるほど株式市場の非効率性が増しているように見える．

国際比較をするために，日本 (TOPIX)，米国 (S&P500)，韓国 (KOSPI200)，英国 (FTSE100)，香港 (HANGSENG)，ドイツ (DAX30) について，Ito Regression によって推定された AR 係数を同じ図にプロットしたものが図 15 である．この図より，サンプル期間が比較的長く取れている日米については，いわゆるポストバブル期を含む約 5 年間のみを除いて米国の株式市場のほうが日本の株式市場よりも相対的に効率的であるということが示唆された．

5 結論

本稿では，カルマン・スムージングを古典的線形回帰モデルに帰着させるという Ito Regression の方法を用いて，株式市場効率性の時変構造を計測した．その結果，分析対象とした 6 カ国すべての株式市場において，市場効率性の時変構造が存在することを確認した．さらに日米比較では，米国のほうが日本に比べて相対的に効率的な時期が多いことが示唆された．本稿では一変量株式収益率データを用いて状態空間モデリングを行なったが，今後は多変量時系列に対して同様の枠組みを適用し，準強度の市場効率性を実証分析を行ないたい．

Data Appendix

日経 225，TOPIX, Dow Jonew Industrial Average は日経 NEEDS より取得した．その他のデータは Econstats(`http://www.econstats.com/home.htm`) より取得した日次データを月中平均に著者が加工した．実証分析には，R version 2.4.1 を用いた．

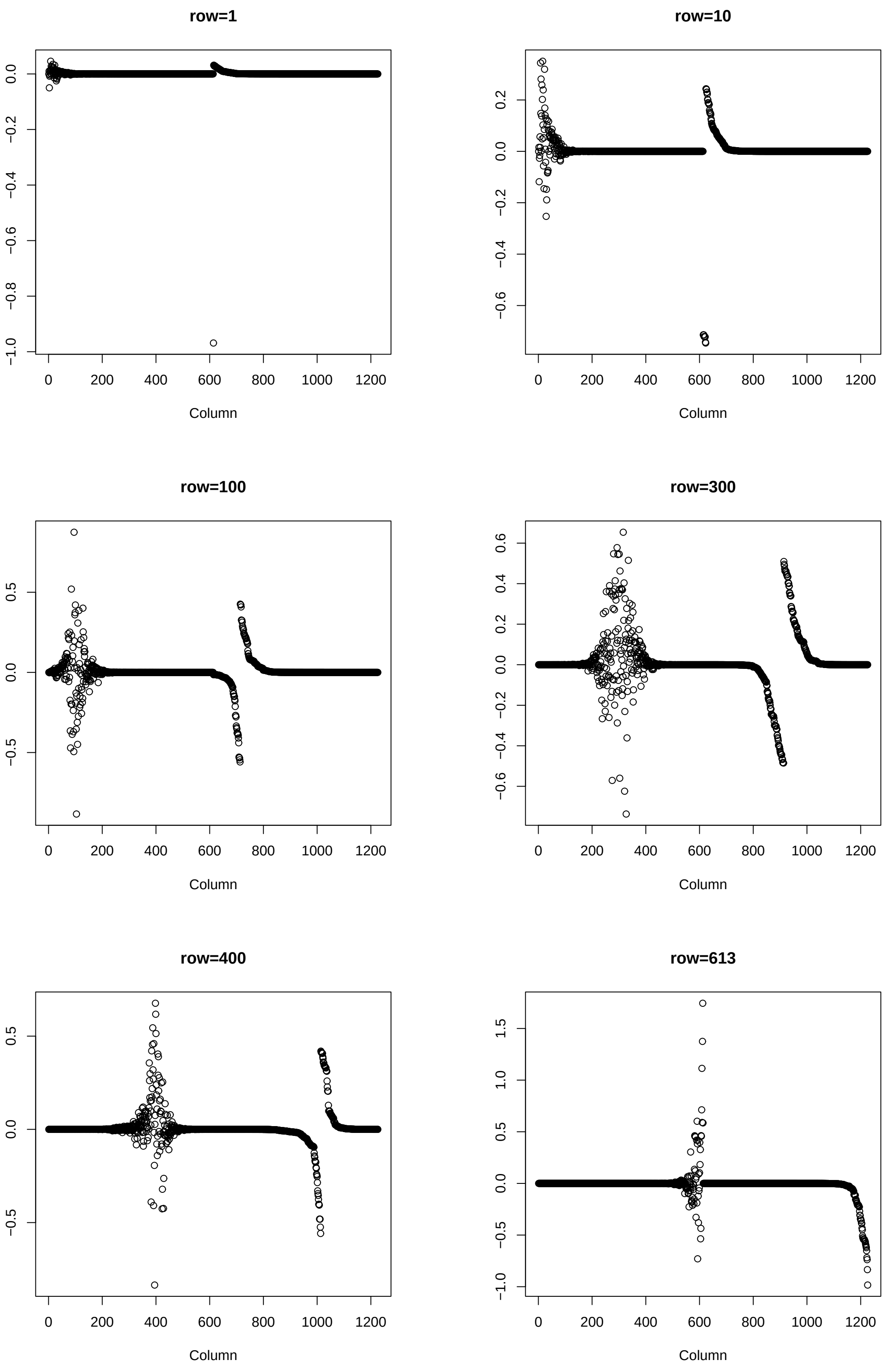

図 8　日経 225，スムージングで活用される情報

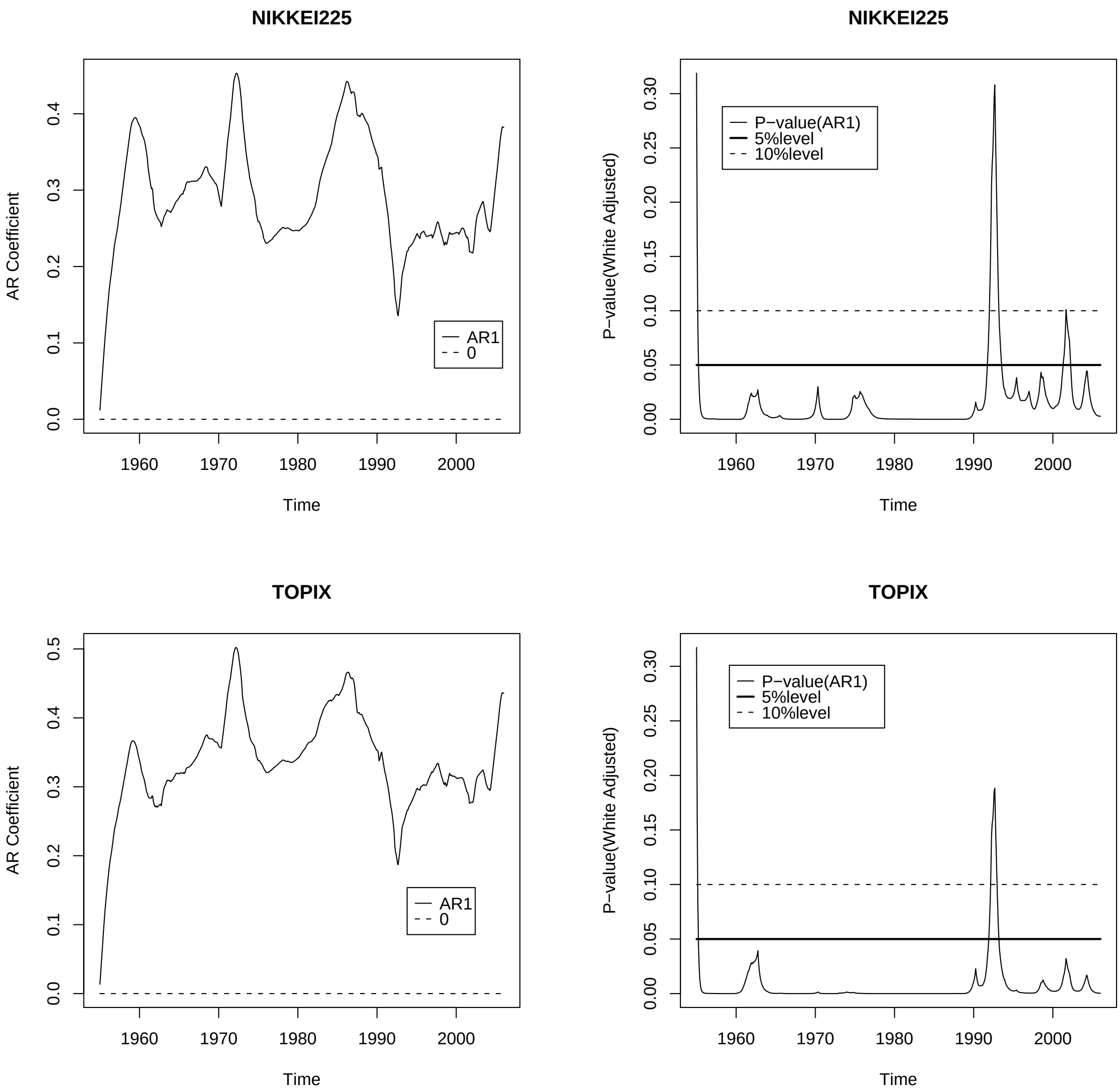

図 9　Ito Regression（日経 225，TOPIX）

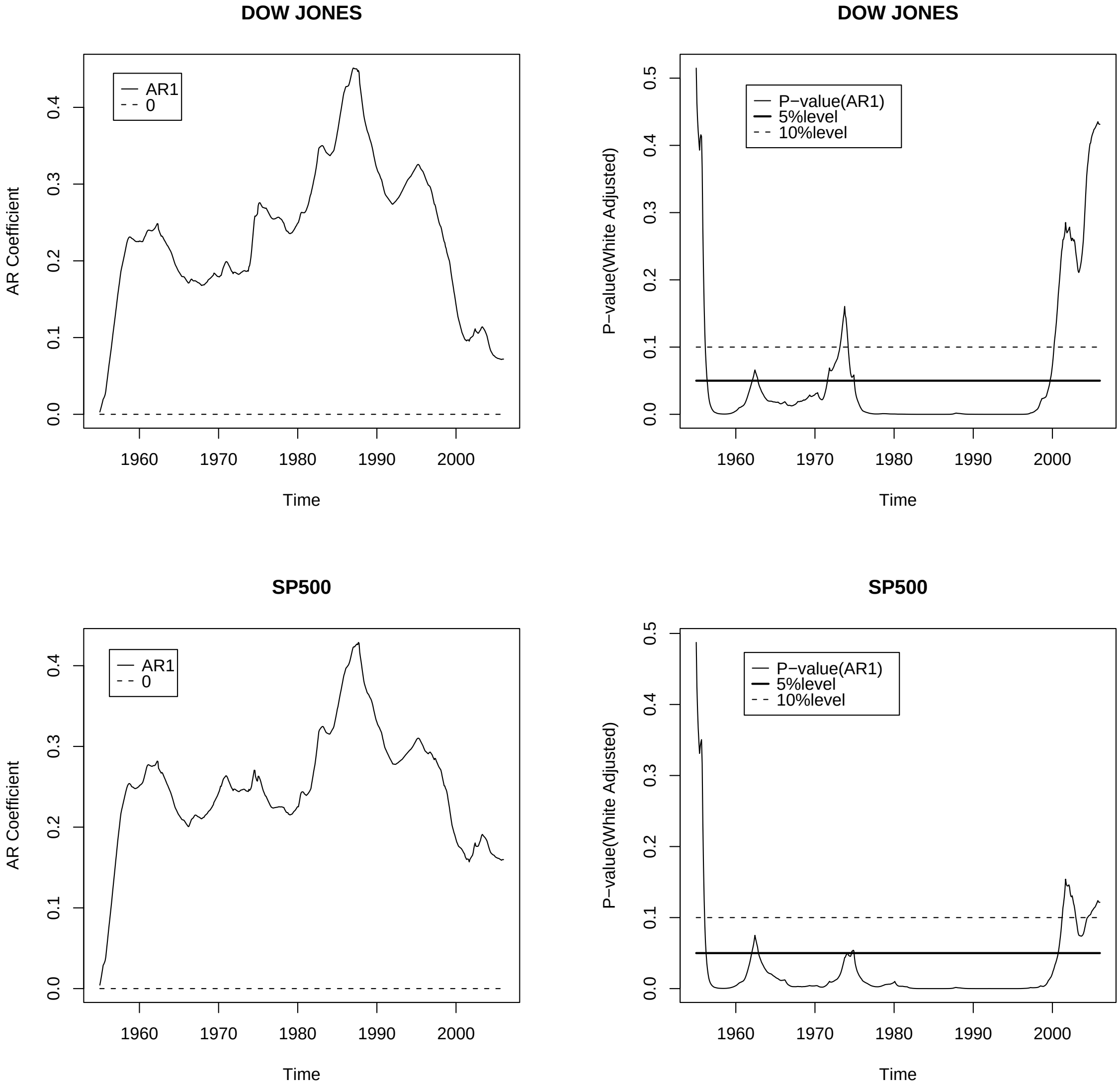

図 10　Ito Regression（Dow Jones Industrial Average，S&P500）

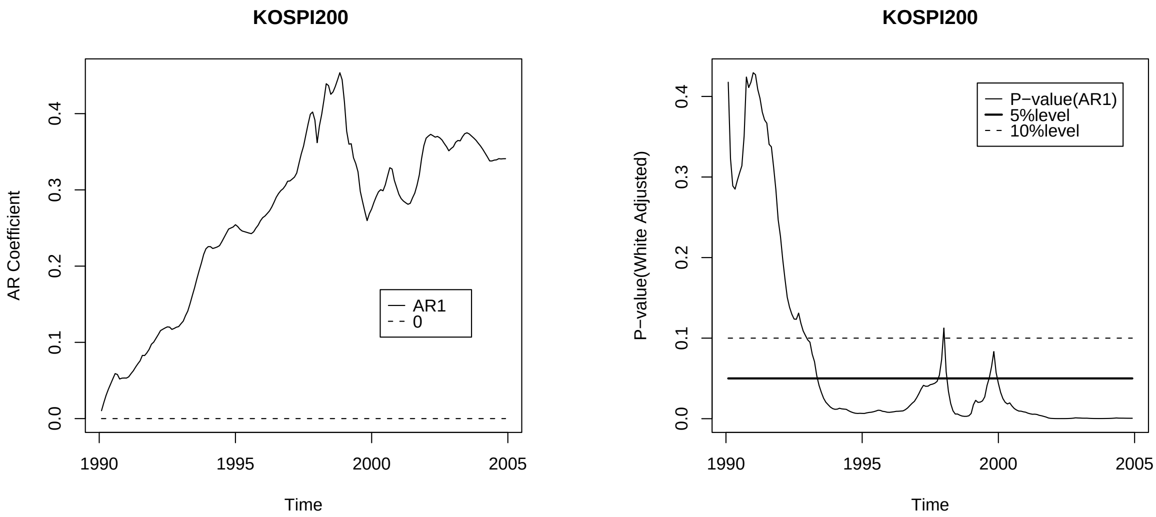

図 11　Ito Regression（KOSPI200）

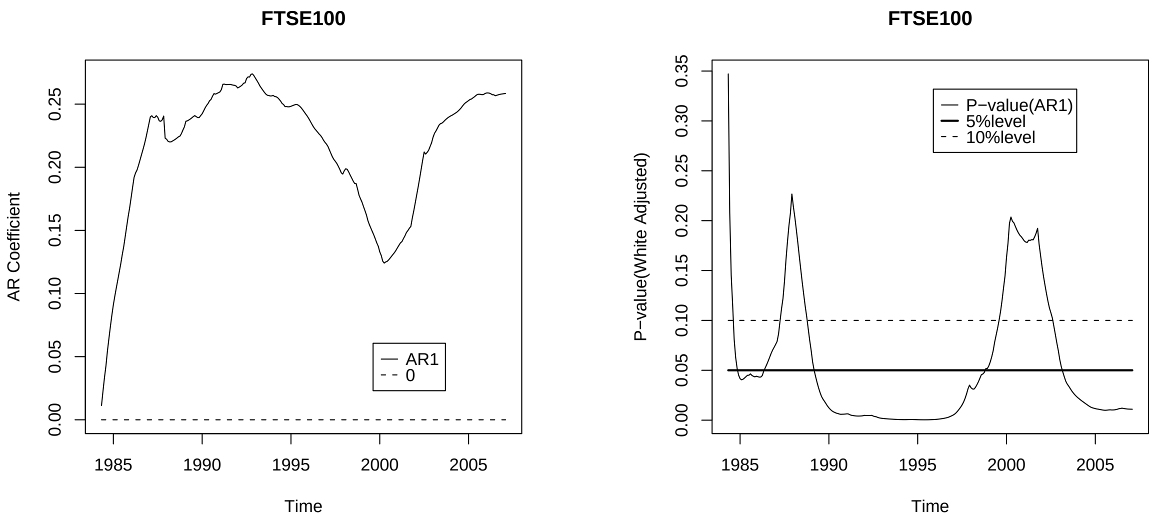

図 12　Ito Regression（FTSE100）

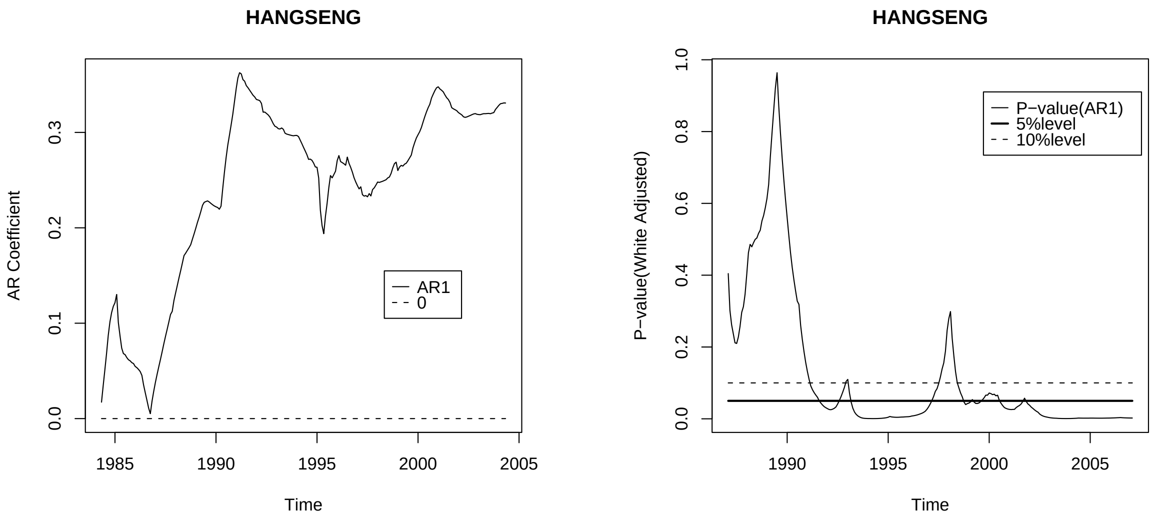

図 13　Ito Regression（HANGSENG）

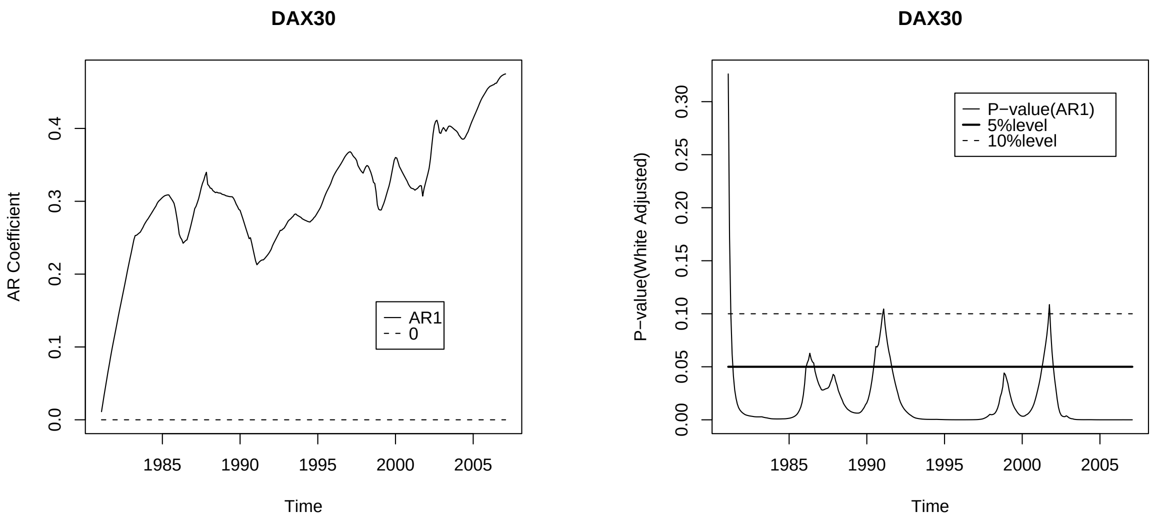

図 14　Ito Regression（DAX30）

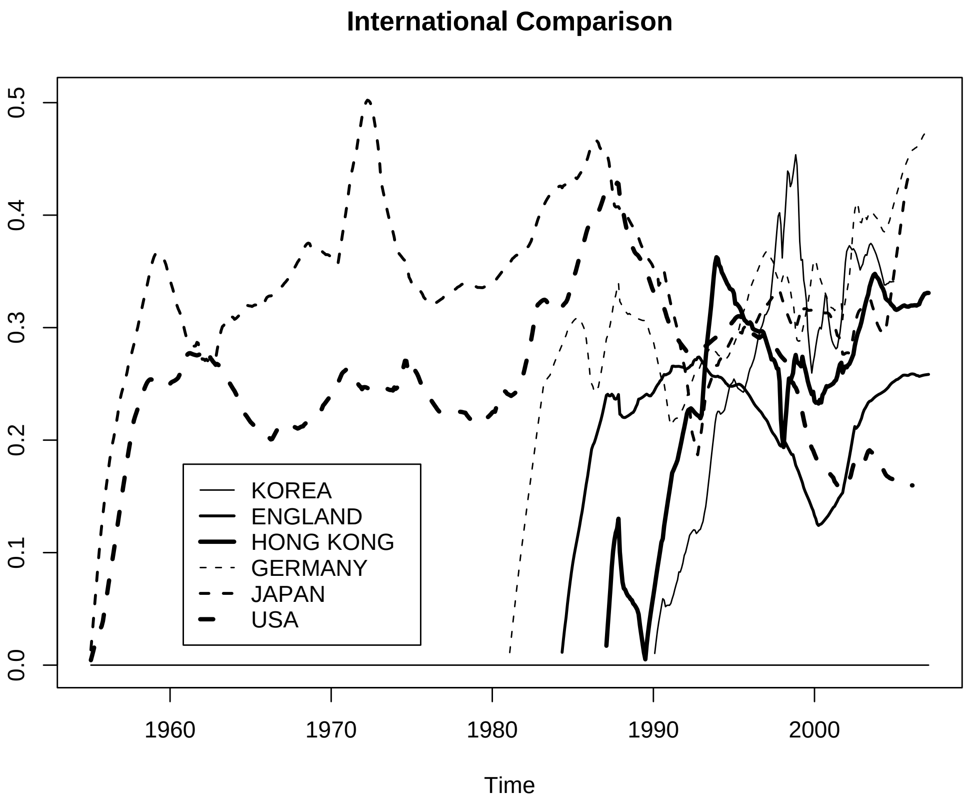
International Comparison
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
1960
1970
1980
1990
2000
Time
KOREA
ENGLAND
HONG KONG
GERMANY
JAPAN
USA

図 15　国際比較

References

Campbell, J. Y., A. W. Lo, and A. C. Mackinlay (1997) *Econometrics of Financial Markets*: Princeton University Press,（祝迫 得夫・大橋 和彦・中村信弘・本多 俊毅・和田賢治訳,『ファイナンスのための計量分析』, 共立出版, 2003 年）.

Durbin, J. and S.J. Koopman (2001) *Time Series Analysis by State Space Methods*: Princeton University Press,（和合肇・松田安昌訳,『状態空間モデルによる時系列分析入門』, シーエーピー出版, 2004 年）.

Engle, F.R. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the Variance of U.K. Inflation," *Econometrica*, Vol. 50, pp. 987–1008.

Fama, E.F. (1970) "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work," *Journal of Finance*, Vol. 25, No. 2, pp. 383–417.

——— (1991) "Efficient Capital Markets: II," *Journal of Finance*, Vol. 82.

Hamilton, J.D. (1994) *Time Series Analysis*: Princeton University Press.

伊藤幹夫 (2006) 『状態空間モデルの直接法による平滑化』, Keio Economic Society, Discussion Paper Series, KESDP 06-5.

Kalman, R.E. (1960) "A New Approach to Linear Filtering nad Prediction Problems," *Journal of Basic Engineering*, Vol. 46, No. 5, pp. 1575–1617.

釜江廣志 (1999) 『日本の証券・金融市場効率性』, 有斐閣.

片山徹 (2000) 『応用カルマンフィルタ』, 朝倉書店.

北川源四郎 (2005) 『時系列解析入門』, 岩波書店.

Lakatos, I. (1978) *The Methodology of Scientific Research Programmes, Philolophical Papers I*: Cambridge University Press.

Lo, A.W. (1991) "Long-term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica*, Vol. 59, pp. 1279–1313.

Malkiel, B.G. (2004) *A Random Walk Down Wall Street: The Time-Tested Strategy for Successful Investing*: W. W. Norton & Company, Inc.

Merton, R.G. (1987) "On the current state of the stock market rationality hypothesis," in *Macroeconomics and Finance: Essays in Honor of Franco Modigliani*: MIT Press, pp. 93–124.

蓑谷千凰彦 (2001) 『金融データの統計分析』, 東洋経済新報社.

Samuelson, P.A. (1965) "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly," *Industrial Management Review*, Vol. 6, pp. 41–49.

Shiller, R.J. (1981) "Do Stock Prices React Too Much to Be Justified by Subsequent Changes in Dividends?" *American Economic Review*, Vol. 71, pp. 421–436.

——— (2005) *Irrational Exuberance: Second Edition*: Princeton University Press.

Stock, J.H. and M.W. Watson (2003) "Has the Business Cycle Changed? Evidence and Explanations." Paper prepared for the symposium, " Monetary Policy and Uncertainty: Adapting to a Changing Economy. " Sponsored by the Federal Reserve Bank of Kansas City, Jackson Hole, WY, August 28-30, (available at: `http://www.kc.frb.org/PUBLICAT/SYMPOS/2003/pdf/Stockwatson2003.pdf`).

Summers, L.H. (1986) "Does the stock market rationally reflect fundamental values?" *Journal of Finance*, Vol. 41, No. 3, pp. 591–601.

Tong, H. (1983) *Threshold models in non-linear time series analysis*: Springer-Verlag Inc.