V 経済分析固有の困難とその解決策

最小２乗推定量(LSE)は

(E1) ε_iの期待値はゼロ:$E(\varepsilon_i)=0$、 **(X1)** X_iの外生性:$Cov(X_i\varepsilon_i)=E(X_i\varepsilon_i)=0$

が成立するとき「(線形)不偏推定量」となり、さらに

(E2) ε_iの分散均一性:$Var(\varepsilon_i)=\sigma^2$、 **(E3)** ε_iは互いに無相関:$Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$

が成立するとき「最良線形不偏推定量」となった。

しかし、実験室とは違い経済分析ではこれらの仮定が成立しない場合が多い。

(1) 説明変数間が強い相関を持つ(**多重共線性, multicolinearity**)
　△不安定なパラメタ、分散が大きなパラメタ（テキスト６章）
　　⇒　経済理論による制約の利用、細分化されたデータの利用
(2) 未知の説明変数の存在、観測不可能性(**omitted variable**)
　×不偏性さえ満たされない($E(b)\neq\beta$)し、b の分散 s^2_b はバイアスをもつ
　　⇒　パネルデータの利用、**パネル推定**（テキスト 12 章）
(3) 説明変数と誤差項の相関($Cov(X_tu_t)\neq 0$):**変量誤差、同時方程式バイアス**
　×不偏性さえ満たされない($E(b)\neq\beta$)し、b の分散 s^2_b はバイアスをもつ
　　⇒　**操作変数法(２段階最小２乗法)**（テキスト８章）
(4) **分散不均一性**(Heteroscedasticity)、**系列相関**(serial correlation)
　△不偏性($E(b)=\beta$)は維持されるが、b の分散 s^2_b はバイアス→仮説検定に誤りが生じる
　　⇒　**一般化最小２乗法**を用いて推定を行なう（テキスト７章） 計量Ｉでやります
(5) 説明変数と被説明変数がともに強いトレンドを持つ(**非定常時系列**の問題)
　△誤った仮説を採択しやすくなる(**単位根、見せかけの回帰**)
　　⇒　共和文検定、Error Correction Model の推定　時系列分析でやります

1 変数を統御できないために生じる問題：多重共線性(multicolinearity)

1.1 多重共線性とは p-113

$Y_t=\beta_0+\beta_1X_{1t}+\beta_2X_{2t}+\varepsilon_t$ において $X_{2t}\fallingdotseq c+dX_{1t}$ の時生じる

　説明変数間の相関が非常に強い状況ではパラメタ推定値が不安定になったり、求められない場合さえある。

(1)図による理解

　消費関数　$C_t=\beta_0+\beta_1Y_t+\beta_2W_t+\varepsilon_t$

　生産関数　$\ln Q_t=\beta_0+\beta_1\ln L_t+\beta_2\ln K_t+\varepsilon_t$

(2)式による理解

　$b=(X'X)^{-1}X'y$, $s_b^2=\sigma^2(X'X)^{-1}$ の $\det(X'X)\fallingdotseq 0$ となる

$$\boxed{\mathrm{var}(b_1)=\frac{\sigma^2}{s_1^2(1-r_{12}^2)}\quad \mathrm{var}(b_2)=\frac{\sigma^2}{s_2^2(1-r_{12}^2)}}$$

s_i^2:Xi の標本分散, r_{12}:X_1,X_2 の相関係数

　r_{12} が大きいほど $\mathrm{var}(b_i)$は大きくなる

1.2 多重共線性の症状　p-116

(1)決定係数が高いのに、回帰係数の標準誤差が大きく、ｔ値が小さい（有意でない）
(2)説明変数を減らしたり、推定期間を変えると、推定結果が大きく変化する。

1.3 多重共線性の回避　p-120

様々な方法が提案されているが、２つの有効な方法がある
(1)先見的情報の利用(理論制約による符号条件、制約条件)して説明変数を減らす

理論的な背景を持つ自律的モデルを利用することのメリット

(例) 需要関数の0次同次性

$\ln Q_i=\alpha+\beta_i \ln p_i+\beta_o \ln p_o+\gamma \ln M=\alpha+\beta_i(\ln p_i+\ln\lambda)+\beta_o(\ln p_o+\ln\lambda)+\gamma(\ln M+\ln\lambda)$

$=\alpha+\beta_i \ln p_i+\beta_o \ln p_o+\gamma \ln M+(\beta_i+\beta_o+\gamma)\ln\lambda$ より

この需要関数が0次同次であるためには $\beta_i+\beta_o+\gamma=0$ でなければならない。

$\beta_o=-\beta_i-\gamma$ とすると $\ln Q_i=\alpha+\beta_i(\ln p_i-\ln p_o)+\gamma(\ln M-\ln p_o)=\alpha+\beta_i \ln(p_i/p_o)+\gamma \ln(M/p_o)$

(2)説明変数が大きく変動するデータを利用するの追加（横断面資料、月次時系列資料）

データの集計は安定的なパラメタの把握を阻害する恐れがある

1.4 事例：需要関数測定における集計データの困難

牛乳の需要関数の推定結果

(1)年次時系列のみ

$\ln Q=-8.80706^{***}+0.540579^{*}\ln(pi/po)+1.26208^{***}\ln M,\ \bar{R}^2=0.8711$

(2)所得階層別データのプール

$\ln Q=5.48205^{***}-0.53295^{***}\ln(pi/po)+.240964^{***}\ln M,\ \bar{R}^2=0.6258$

灯油の需要関数

(1)年次時系列

$\ln Q=4.02313+0.020615\ln(pi/po)+0.310346\ln M,\ \bar{R}^2=-0.04521$

(2)月次データ

$\ln Q=-1.12585^{**}-0.04702^{**}1\ln(pi/po)+0.476925^{***}\ln M,\ \bar{R}^2=0.985231$

2 説明変数の不足により生じる問題

2.1 過少定式化(説明変数が観測不可能) p-107

真のモデル：$Y_i=\alpha+\beta X_i+\gamma Z_i+\varepsilon_i$

推定モデル：$Y_i=\alpha+\beta X_i+v_i,\ v_i=\gamma Z_i+\varepsilon_i$

OLSE：$b=\Sigma w_i Y_i=\Sigma w_i(\alpha+\beta X_i+\gamma Z_i+\varepsilon_i)=\beta+\gamma\ \Sigma w_i Z_i+\Sigma w_i\varepsilon_i$

Bias $\boxed{E(b)-\beta=\gamma\dfrac{\sum(X_i-\bar{X})Z_i}{\sum(X_i-\bar{X})^2}=\gamma\dfrac{dZ}{dX}}$

$\gamma>0$ で X と Z が正の相関を持つときプラスのバイアスが生じる

例）賃金関数 $W_i=\alpha+\beta EDU_i+\gamma Abilty_i+\varepsilon_i$ において $W_i=\alpha+\beta EDU_i+v_i$ を推定すると β の OLSE である b のバイアスは $\gamma(dABL/dEDU)>0$ となるので過大推定していることになる

2.2 Panel データの利用：p-245

真のモデル：$Y_{it}=\alpha+\beta X_{it}+\gamma Z_i+\varepsilon_{it}$(同じ個人に対する時系列データ)

のとき、個人 i の平均値が $\bar{Y}_i=\alpha+\beta\bar{X}_i+\gamma Z_i+\bar{\varepsilon}_i$ となることから、個人 i に関する時点間の偏差に関して $\boxed{(Y_{it}-\bar{Y}_i)=\beta(X_{it}-\bar{X}_i)+(\varepsilon_{it}-\bar{\varepsilon}_i)}$ を推定することで β の不偏推定量を得ることが出来る。この推定量のことを **within estimator** という。

例）パネルデータとしては企業データがある。数は少ないが家計データも存在する

アメリカでは双子のペアデータなどもある。

例）テキスト p-261 の県別パネルデータを用いた消費関数

$b_{OLS}=0.708046(87.1037)$

$b_{within}=0.645956(47.6564)$

3. 説明変数と誤差項との相関により生じる問題

3.1 何が問題なのか？(p-171)

$E(X_t, \varepsilon_t) \neq 0$ の時には不偏性が維持されない！

$$b=\frac{\mathrm{cov}(X,\alpha+\beta X+\varepsilon)}{\mathrm{var}(X)}=\frac{\beta\,\mathrm{var}(X)+\mathrm{cov}(X,\varepsilon)}{\mathrm{var}(X)}=\beta+\frac{\mathrm{cov}(X,\varepsilon)}{\mathrm{var}(X)}$$

3.2 どんな時に起こるのか？(p-173～181)

(1) 説明変数に観測エラーが存在する(Errors in Variables)→薄められる(attenuation bias)

真の値 X^*の代わりに誤差 v を含んだ変数 $X=X^*+v$ しか我々は観察できないとき…

真の関係式から $Y=\alpha+\beta(X-v)+\varepsilon=\alpha+\beta X+u$, $u=-\beta v+\varepsilon$ が得られることから

我々が推計できる関係式では $\mathrm{var}(X)=\mathrm{var}(X^*)+\mathrm{var}(v)$、$\mathrm{cov}(X,u)=\mathrm{cov}(X^*+v,-\beta v+\varepsilon)=-\beta\,\mathrm{var}(v)<0$ のように X と u とには相関が生じる！

$$b=\beta+\frac{\mathrm{cov}(X,u)}{\mathrm{var}(X)}=\beta\left[1-\frac{\mathrm{var}(v)}{\mathrm{var}(X^*)+\mathrm{var}(v)}\right]<\beta$$ 下方バイアスが生じる！

(2) 同時方程式(Simultaneous Equations)

・消費関数 $C=\alpha+\beta GDP+\varepsilon$, $GDP=C+I \rightarrow GDP=(\alpha+I+\varepsilon)/(1-\beta)$

$$\mathrm{cov}(GDP, u)=\mathrm{cov}\left[\frac{\alpha+I+\varepsilon}{1-\beta},\varepsilon\right]=\frac{\mathrm{var}(\varepsilon)}{1-\beta}>0$$ となることから

$$b=\beta+\frac{\mathrm{var}(\varepsilon)}{(1-\beta)\,\mathrm{var}(GDP)}>\beta$$ 上方バイアスが生じる！！

・需給モデル $q_t=d_0+d_1p_t+d_2m_t+u_t$, $q_t=s_0+s_1p_t+s_2w_t+v_t$, $E(uv')=\mathrm{diag}(\sigma^2_u, \sigma^2_v)$

$q_t=\pi_{11}m_t+\pi_{12}w_t+e_{1t}$, $p_t=\pi_{21}m_t+\pi_{22}w_t+e_{2t}$, $\pi_{11}=-d_2s_1/(d_1-s_1)$, $\pi_{12}=d_1s_2/(d_1-s_1)$, $e_{1t}=(d_1v_t-s_1u_t)/(d_1-s_1)$, $\pi_{21}=--d_2/(d_1-s_1)$, $\pi_{22}=s_2/(d_1-s_1)$, $e_{2t}=(v_t-u_t)/(d_1-s_1)$,

需要関数では $\mathrm{cov}(p_t,u_t)=-\sigma^2_u/(d_1-s_1)>0$, 供給関数では $\mathrm{cov}(p_t,v_t)=\sigma^2_v/(d_1-s_1)<0$ という下方ﾊﾞｲｱｽが生じる。

3.3 推定方法: テキスト p-181, p-184

(1) 間接最小２乗法(Indirect Least Square Method): 不偏推定量

$$Y=\frac{\alpha}{1-\beta}+\frac{1}{1-\beta}I+\frac{1}{1-\beta}\varepsilon$$

(2) 操作変数法(Instrumental Variable Method)：consistent estimator

1) 操作変数の想定 ：$\mathrm{cov}(Z,X)\neq 0$, $\mathrm{cov}(Z,\varepsilon)=0$

X とは相関があるが、ε とは相関がない **Z** を操作変数とする

例) $C=\alpha+\beta Y+\varepsilon$ において I はＹと相関をもつが, ε とは相関をもたない

2) $$b_{IV}=\frac{dY}{dX}=\frac{dY/dZ}{dX/dZ}=\frac{\mathrm{cov}(Y,Z)/\mathrm{var}(Z)}{\mathrm{cov}(X,Z)/\mathrm{var}(Z)}=\frac{Cov(Y,Z)}{Cov(X,Z)}$$

$$\boxed{b_{IV}=\frac{\mathrm{cov}(Y,Z)}{\mathrm{cov}(X,Z)}=\frac{\mathrm{cov}(\alpha+\beta X+\varepsilon,Z)}{\mathrm{cov}(X,Z)}=\beta+\frac{\mathrm{cov}(Z,\varepsilon)}{\mathrm{cov}(X,Z)}}$$

Z と ε が相関を持たない&Z と X が相関を持つ→$b_{IV}=\beta$

(3) 2 段階最小二乗法(2 Stage Least Square Method) ：consistent estimator

①説明変数 X_i を操作変数 Z_i で回帰する: $\hat{X}_i=d_0+d_1Z_i+v_i$, $d_1=\mathrm{cov}(X,Z)/\mathrm{var}(Z)$

②被説明変数 Y_i を X_i の理論値で回帰する: $Y_i=a+b\hat{X}_i+\varepsilon_i$

$$\boxed{b_{2SLS} = \frac{\mathrm{cov}(Y,\hat{X})}{\mathrm{var}(\hat{X})} = \frac{\mathrm{cov}(Y,Z)}{d_1\,\mathrm{var}(Z)} = \frac{\mathrm{cov}(Y,Z)}{\mathrm{cov}(X,Z)} = b_{IV}}$$

$\mathrm{cov}(Y,\hat{X})=\mathrm{cov}(Y,d_0+d_1Z+v)=d_1\mathrm{cov}(Y,Z)$, $\mathrm{var}(\hat{X})=\mathrm{var}(d_0+d_1Z+v)=d^2{}_1\mathrm{var}(Z)$

3.4 推定の実際

(1) どのように操作変数を選ぶのか？

構造方程式に登場する変数

税率や公的支出などの政策変数、天災等偶然生じた事象

ラグつき内生変数(系列相関がある場合は不適切)

(2) IV は OLS よりもバイアスが大きくなる恐れがある(小標本において)

$$b_{IV} = \beta + \frac{corr(z,u)}{corr(z,x)}\frac{\sigma_u}{\sigma_x}$$

1)Z と ε が相関を持つ時、１段階目の回帰ﾊﾞｲｱｽは２段階目のﾊﾞｲｱｽをさらに大きくする

2)Z と X が相関しない時もバイアスが大きくなる→Z と X の相関はチェックする必要あり

3.5 実例：米国におけるタバコの需要関数の測定

1985-95 年の州別の価格 P_{it} と需要量 Q_{it}

$\Delta\ln Q_{it}=-0.94\Delta\ln P_{it}+0.53\Delta\ln M_{it}$ Panel 推定

(4.48) (1.56)

$\Delta\ln Q_{it}=-1.34\Delta\ln P_{it}+0.43\Delta\ln M_{it}$ Panel+操作変数=sales tax

(5.83) (1.43)

$\Delta\ln Q_{it}=-1.20\Delta\ln P_{it}+0.46\Delta\ln M_{it}$ Panel+操作変数=sales tax, cigarette tax

(6.00) (1.92)